

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À

L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAITRISE EN ELECTRONIQUE INDUSTRIELLE

PAR

MOHAMMED ELJIHAD

MODELISATION PROBABILISTE DES HARMONIQUES

GENERES PAR LES CONVERTISSEURS DANS LES

INSTALLATIONS ELECTRIQUES

Janvier 2001

1971

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Résumé

Avec la prolifération des convertisseurs statiques, l'importance est de plus en plus accordée aux effets néfastes des perturbations harmoniques sur les différentes installations électriques. Dans ce mémoire, nous élaborons des modèles probabilistes efficaces des harmoniques caractéristiques et non caractéristiques produits par les redresseurs hexaphasés et dodécaphasés à commutation naturelle fonctionnant aléatoirement en régime équilibré ou non.

Cette étude est abordée sous l'angle déterministe, puis sous l'angle probabiliste. Des expressions analytiques simples des amplitudes et des phases des harmoniques caractéristiques et non caractéristiques sont établies en fonction du taux de déséquilibre de tension. Puis les densités de probabilité des amplitudes et des phases des harmoniques sont établies à partir des modèles probabilistes des variations aléatoires du déséquilibre de tension et de la charge. La validité des modèles probabilistes développés est vérifiée par simulation selon une méthode de Monte Carlo. La méthode probabiliste est ensuite appliquée à l'étude d'installations multi-convertisseurs fonctionnant aléatoirement. Afin de vérifier la validité de l'approche probabiliste développée, des résultats théoriques sont confrontés aux résultats expérimentaux.

Mots clés

Installations électriques, convertisseur, harmoniques, probabilité.

Remerciements

Ce mémoire constitue une exigence partielle pour l'obtention du grade de Maîtrise en génie électrique (M.Sc.).

Je désire exprimer ma sincère reconnaissance à mon directeur, M. Éloi Ngandui, pour l'encouragement et les conseils qu'il m'a prodigués lors de l'élaboration et de la réalisation de cette recherche. Je voudrais le remercier particulièrement pour sa patience et sa disponibilité de tous les instants.

Mes remerciements vont également à mon co-directeur, M. Ahmed Cheriti, pour sa collaboration et sa disponibilité.

La seconde mention ira à ma mère qui m'a offert toutes les chances qui lui étaient possibles de me donner afin que je réussisse ce travail.

Je ne saurais passer sous le silence la contribution des membres de la chaire de recherche industrielle Hydro-Québec .

Ma gratitude, enfin, à tous ceux qui de près ou de loin, ont permis la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Résumé	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	ix
Liste des symboles	x
Chapitre 1 :Introduction	1
1.1.Problématique	1
1.2.Objectif.....	2
1.3.Méthodologie	3
Chapitre 2 : Modélisation déterministe des harmoniques produits par un convertisseur à six pulsations sous tensions déséquilibrées	5
2.1.Introduction	5
2.2.Modélisation du déséquilibre des tensions	6
2.3.Modélisation des harmoniques de courant sous tensions déséquilibrées	9
2.3.1. Commande individuelle.....	9
2.3.2. Commande équidistante.....	12
2.4.Simplification du modèle	13
2.4.1. Relations des amplitudes de la commande individuelle.....	13
2.4.1.1. Harmoniques caractéristiques.....	14
2.4.1.2. Harmoniques non caractéristiques.....	15
2.4.2. Commande équidistante.....	16
2.4.3. Relations de phases.....	16
2.4.3.1. Commande individuelle.....	16
2.4.3.2. Commande équidistante	17
2.5.Comparaison entre les modèles simplifiés et les modèles de base	17
2.6.Conclusion	20

Chapitre 3 : Modélisation analytique des harmoniques produits par un convertisseur à douze pulsations sous tensions déséquilibrées.....	21
3.1.Introduction.....	21
3.2.Harmoniques de courants produits par un convertisseur à douze pulsations sous tensions déséquilibrées.....	23
3.2.1. Harmoniques produits par le convertisseur à douze pulsations.....	29
3.2.2. Harmoniques non caractéristiques produits par le convertisseur à douze pulsations.....	29
3.3.Simplification du modèle.....	30
3.3.1. Harmoniques caractéristiques de rang $h=12k\pm1$	30
3.3.2. Harmoniques non- caractéristiques de rang $h=12k-6\pm1$	31
3.4.Résultats de simulation	31
3.5.Conclusion	34
 Chapitre 4 : Modélisation probabiliste d'un convertisseur à six pulsations en régime déséquilibré	35
4.1.Introduction.....	35
4.2.Modèle du convertisseur	36
4.3.Densité de probabilité des amplitudes harmoniques.....	39
4.3.1. Charge aléatoire et tensions équilibrées	39
4.3.1.1. Commande équidistante	39
4.3.1.2. Commande individuelle.....	41
4.3.2. Charge fixée et déséquilibre aléatoire des tensions	42
4.3.3. Charge et déséquilibre aléatoires	42
4.4.Densité de probabilité des phases harmoniques	43
4.4.1. Charge aléatoire et tensions équilibrées	43
4.4.1.1. Commande équidistante	43
4.4.1.2. Commande individuelle.....	44
4.4.2. Charge fixée et déséquilibre aléatoire des tensions	44
4.4.2.1. Commande équidistante	44
4.4.2.2. Commande individuelle.....	48
4.4.3. Charge et déséquilibre aléatoires des tensions	48
4.4.3.1. Commande équidistante	48
4.4.3.2. Commande individuelle.....	49

4.4.4. Densités de probabilité des phases définies sur le cercle	50
4.5. La méthode de Monte Carlo	51
4.5.1. Méthode aveugle « Monte Carlo »	51
4.5.2. Méthodes d'intégration numérique.....	52
4.5.3. La méthode des trapèzes (et la moyenne de fonctions)	53
4.5.4. La méthode des arcs paraboliques	53
4.6. Simulation de Monte Carlo	54
4.6.1. Comparaison des résultats concernant les amplitudes.....	55
4.6.2. Comparaison des résultats concernant les phases.....	57
4.7. Conclusion	61
 Chapitre 5 : Modélisation probabiliste des harmoniques produits par un redresseur à douze pulsations	62
5.1. Introduction	62
5.2. Modélisation des harmoniques du convertisseur à douze pulsations	63
5.3. Analyse probabiliste.....	64
5.3.1. Densité de probabilité des amplitudes.	64
5.3.2. Densité de probabilité des phases	65
5.4. Résultats de simulation	67
5.5. Discussion	71
5.6. Conclusion	72
 Chapitre 6: Sommation des harmoniques probabilistes.....	73
6.1. Introduction	73
6.2. Composantes réelles et imaginaires du modèle probabiliste	75
6.3. Sommation des courants harmoniques.....	77
6.3.1. Détermination des paramètres de la densité jointe.....	78
6.3.1.1. Calcul des moyennes	78
6.3.1.2. Calcul des écarts types.....	79
6.3.1.3. Calcul du coefficient de corrélation	80
6.3.2. Densité de probabilité de la résultante.....	81
6.4. Résultats	81

6.4.1. Calcul des paramètres du modèle BND.....	83
6.4.2. Comparaison entre les résultats analytiques et la simulation de Monte Carlo	85
6.5.Conclusion	87
 Chapitre 7 : Mesures expérimentales	88
7.1.Introduction.....	88
7.2.Mesures	88
7.2.1. Dispositif de mesure	88
7.2.2. Installation de mesure	89
7.2.3. Le logiciel d'acquisition de données Dran-View	90
7.3.Densité de probabilité de l'angle d'allumage	92
7.3.1. Le logiciel d'approximation Expert Fit	92
7.3.2. Angle d'allumage.....	93
7.4.Comparaison	95
7.4.1. Modèle de Graham-Schonholzer	95
7.4.2. Résultats.....	96
7.4.2.1. Un seul convertisseur triphasé	96
7.4.2.2. Réseau de huit convertisseurs hexaphasés	99
7.5.Conclusion	104
 <i>Conclusion</i>	105
<i>Bibliographie</i>	107
<i>Annexe A : Publications</i>	111
<i>Annexe B</i>	123

Liste des figures

Figure 2.1: Schéma équivalent d'un redresseur hexaphasé	6
Figure 2.2: Angle de déviation de phase de la tension composée causé par la séquence inverse [WAN 92]	8
Figure 2.3: Tensions composées (U_{ab} et U_{ca}) et le courant correspondant dans la phase A	10
Figure 2.4: Variation des courants harmoniques (phase A) avec θ ; (Commande individuelle, $\alpha = 15^\circ$, $\tau = 5\%$)	18
Figure 2.5: Variation des courants harmoniques (phase A) avec θ ; (Commande individuelle, $\alpha = 15^\circ$, $\tau = 10\%$)	19
Figure 2.6: Variations des phases des courants harmoniques (phase A) avec θ (commande équidistante)	19
Figure 2.7: Variations des phases des courants harmoniques (phase A) avec θ (Commande individuelle)	20
Figure 3.1: Convertisseur à douze pulsations	23
Figure 3.2: Tensions V_{an} , U_{ac} , $U_{a'c'}$ et les courants i_a et i'_a	24
Figure 3.3 : Variations du module et de la phase du courant harmonique de rang 5 avec θ ; $\alpha = 15^\circ$, $\tau=3\%$, $E_c=0$ et $R_d=1.0$ p.u.	32
Figure (3.4) : Variations du module et de la phase du courant harmonique de rang 7 avec θ ; $\alpha = 15^\circ$, $\tau=3\%$, $E_c=0$ et $R_d=1.0$ p.u.	32
Figure 3.5 : Variations du module et de la phase du courant harmonique de rang 11 avec θ ; $\alpha = 15^\circ$, $\tau=3\%$, $E_c=0$ et $R_d=1.0$ p.u.	33
Figure 3.6 : Variations du module et de la phase du courant harmonique de rang 13 avec θ ; $\alpha = 15^\circ$, $\tau=3\%$, $E_c=0$ et $R_d=1.0$ p.u.	33
Figure 3.7 : Variations du module du courant harmonique de rang 11 et 13 avec θ ; $\alpha = 15^\circ$, $\tau=3\%$, $E_c=0$ et $R_d=1.0$ p.u.	34
Figure 4.1: Densité de probabilité de I_{e5} pour différents intervalles	41
Figure 4.2: Densité de probabilité de I_{d5} pour différents intervalles de variations de α , la valeur moyenne de τ étant de 5%	56
Figure 4.3: Densité de probabilité de J_{d3} pour différents intervalles de variations de α , la valeur moyenne de τ étant de 5%	56
Figure 4.4: Densités de probabilité de phase pour α variant entre 15° et 90° $E[\tau]=0\%$	57
Figure 4.5: Densités de probabilité de phase pour $\alpha = 15^\circ$, $E[\tau]=5\%$	58
Figure 4.6: Densités de probabilité de phase pour $\alpha \in [15^\circ, 90^\circ]$, $E[\tau]=5\%$	58

Figure 4.7 Densités de probabilité de phase pour α variant entre 15° et 90° , $E[\tau]=5\%$; +, o : Simulation de Monte Carlo, — : Expressions analytiques ...	59
Figure 4.8: Densités de probabilité de phase pour α variant entre 15° et 90° , $E[\tau]=5\%$	59
Figure 5.1: Densité de probabilité de I_{A11} pour différents intervalles de α , $E[\tau]=5\%$, Points : simulation de Monte Carlo, Courbes : expressions analytiques	68
Figure 5.2: Densité de probabilité de I_{A11} pour différents intervalles de α , $E[\tau]=3\%$, Points : simulation de Monte Carlo, Courbes : expressions analytiques	69
Figure 5.3: Densité de probabilité de J_{A5} pour différents intervalles de α , $E[\tau]=3\%$, Points : simulation de Monte Carlo, Courbes : expressions analytiques	69
Figure 5.4: Densité de probabilité de Ψ_{A11} et Ψ_{A13} pour $\alpha=[15^\circ 90^\circ]$, $E[\tau]=3\%$, Points : simulation de Monte Carlo, Courbes : expression analytique	70
Figure 5.5: Densités de probabilité de φ_{A5} et φ_{A7} pour $\alpha=[15^\circ 90^\circ]$, $E[\tau]=3\%$, Points : simulation de Monte Carlo, Courbe : expression analytique.....	70
Figure 6.1 : Un réseau radial contenant 10 convertisseurs dodécaphasés	82
Figure 6.2: Densités de probabilité des sommes des harmoniques d'ordre 11 et histogrammes empiriques correspondants obtenus par la simulation de Monte Carlo.....	85
Figure 6.3: Densités de probabilité des sommes des harmoniques d'ordre 13 et histogrammes empiriques correspondants obtenus par la simulation de Monte Carlo.....	86
Figure 7.1: Installation contenant huit convertisseurs à thyristors pour moteurs à courant continu de la compagnie ALCAN à Shawinigan.....	89
Figure 7.2: Tension composée de la phase A et courant de la phase B du convertisseur 8	91
Figure 7.3: Spectre de courant (dans la phase B).....	92
Figure 7.4: Densité de probabilité de l'angle d'allumage du convertisseur 8	93

Liste des tableaux

Tableau 6.1: Intervalles de variation de l'angle de commande.....	82
Tableau 6.2: Paramètres des courants harmoniques de rang 11 générés par les convertisseurs.....	83
Tableau 6.3 : Paramètres du modèle BND correspondant aux harmoniques de rang 11 passant par les transformateurs	83
Tableau 6.4 : Paramètres des courants harmoniques de rang 13 générés par les convertisseurs.....	84
Tableau 6.5 : Paramètres du modèle BND correspondant aux harmoniques de rang 13 passant par les transformateurs	84
Tableau 7.1: Caractéristiques des moteurs de l'installation électrique	90
Tableau 7.2: Paramètres du modèle de la densité de probabilité de l'angle α du convertisseur 8.	94
Tableau 7.3: Bilan des échantillons des histogrammes de l'angle α du convertisseur 8.	94
Tableau 7.4: Paramètres des modèles expérimentaux des densités de probabilité des courants harmoniques du convertisseur 8.....	97
Tableau 7.5: Paramètres du modèle de la densité de probabilité de l'angle α de chaque convertisseur.	100
Tableau 7.6: Taux d'ondulation r_c , angle de commutation μ et réactance de ligne correspondant à chaque convertisseur	101
Tableau 7.7: Paramètres des modèles expérimentaux des densités de probabilité de la somme des courants harmoniques des huit convertisseurs	102

Liste des symboles

τ	Taux de déséquilibre;
α	Angle d'allumage;
θ	Angle de déséquilibre;
β	Phase des harmoniques caractéristique de courant sous la commande individuelle;
Φ	Phase des harmoniques de courant sous la commande équidistante;
ω	Pulsation;
Ψ	Phase des harmoniques caractéristiques de courant du convertisseur Dodécaphasé;
μ	Moyenne;
σ	Écart type;
λ	Constante de calcul;
ρ	Coefficient de corrélation;
$\Delta\alpha$	Variation de l'angle d'allumage;
σ'	Écart type;
φ_{xx}	Angles de début et de la fin de conduction du courant positif;
δ_{xx}	Écart de passage par zéro de la tension composée;
γ_{xx}	Angle de passage par zéro;
C'_e	Constante de calcul;
C_d	Constante de calcul;
C_e	Constante de calcul;
C_h	Constante de calcul;
C_j	Constante de calcul;
C_{te}	Constante de calcul;
$E[\tau]$	Moyenne du taux de déséquilibre;
$E[X^x]$	Moment d'ordre x de la variable aléatoire X;
E_c	Force contre électromotrice;
Erf	Fonction d'erreur;
e_{xx}	Tensions composées;
$f_x(x)$	Densité de probabilité de la variable aléatoire X;
i'_a	Courant secondaire dans la phase a' du convertisseur dodécaphasé;
i_a	Courant secondaire dans la phase a du convertisseur dodécaphasé;
I_d	Courant de charge;
I_h	Courant harmonique;
J	Courant harmonique non-caractéristique;
$J(x,y)$	Matrice jacobienne ;
k	Indice du rang des harmoniques de courant;
K_{UBF}	Facteur complexe du taux de déséquilibre de tensions;

L	Transformé de Laplace;
L^{-1}	Transformé inverse de Laplace;
L_x	Inductance de ligne;
m	Constante;
n	Indice;
P	Variable aléatoire;
Q	Variable aléatoire;
R	Résultante des parties imaginaires et réels;
r	Module de la somme vectorielle;
R_d	Résistance de charge;
T	Variable aléatoire;
U	Fonction de heaviside;
U_{xx}	Tension composée;
V	Tension simple;
V-	Tension inverse;
V+	Tension directe;
V_d	Tension de charge;
W	Variable aléatoire;
X	Variable aléatoire;
X_d	Réductance de charge;
X_h	Partie réelle de l'harmonique de courant de rang h;
X_i	Partie réelle du $i^{\text{ième}}$ convertisseur;
X_t	Somme des parties Réelles;
Y	Variable aléatoire;
Y_h	Partie imaginaire de l'harmonique de courant de rang h;
Y_i	Partie imaginaire du $i^{\text{ième}}$ convertisseur;
Y_t	Somme des parties imaginaires;
Z	Variable aléatoire;

Chapitre 1 :Introduction

1.1. Problématique

Avec la prolifération des applications utilisant des charges non linéaires (Convertisseur de fréquences, redresseur hacheurs, etc), le contenu harmonique est en constante augmentation dans les réseaux de distribution électriques industriels.

Dans ces derniers, les charges non linéaires ont souvent été ajoutées au fur et à mesure des évolutions technologiques des procédés ou des besoins nouveaux sans préoccupation pour le contrôle des harmoniques.

Paradoxalement, les charges non linéaires affectent la qualité de l'onde et peuvent aussi à leur tour être affectées par la qualité de l'onde surtout si elles sont en présence de condensateurs pour la correction du facteur de puissance.

La conception des réseaux contenant un fort pourcentage de charge non linéaires doit être différente d'un réseau de distribution régulier. Les précautions prises dès la conception peuvent faire réaliser des économies appréciables à l'exploitateur du réseau.

Une meilleure compréhension des harmoniques peut aider à mieux prendre les décisions dans le choix de l'appareillage électrique ou le choix d'un spécialiste dont le mandat sera de régler ou de prévoir les problèmes causés par les harmoniques.

Pour réduire les harmoniques de courants et corriger le facteur de puissance en basse ou en moyenne tension, des filtres accordés sont habituellement utilisés[LIN 98,CAV 98]. Une conception de filtres basée sur des hypothèses très optimistes conduit à une diminution de la durée de vie des condensateurs de filtrage alors que des hypothèses très pessimistes ne rencontrent guère les exigences économiques [KIM 91]. Si les harmoniques pouvaient être prédits efficacement dès la phase de conception des installations électriques, les solutions pour les limiter et leurs effets

Chapitre 1

pourraient être mieux adaptées et l'appareillage électrique dimensionné de façon optimale. L'approche déterministe de prédiction couramment employée consiste à appliquer à un système composé de plusieurs convertisseurs fonctionnant aléatoirement, l'étude de configurations particulières comme "le pire des cas". Cette approche, basée sur la somme algébrique des amplitudes des harmoniques, fournit les harmoniques les plus élevés peu représentatifs de la réalité et il n'est pas économiquement justifié de dimensionner l'appareillage électrique pour ces valeurs si elles n'apparaissent jamais ou très rarement. L'approche probabiliste semble la mieux indiquée pour estimer les courants et les tensions harmoniques compte tenu du nombre sans cesse croissant de convertisseurs statiques fonctionnant de façon autonome dans les installations électriques[BLO 97]. Quelques travaux ont déjà traité de la prévision des harmoniques et de la conception des équipements de compensation en faisant recours soit aux méthodes statistiques basées sur des relevés expérimentaux [LIN 98]; ce qui requiert temps et main d'œuvre importants; soit aux simulations de Monte Carlo basées sur des modèles déterministes des convertisseurs; les simulations de Monte Carlo exigent un temps de calcul long et beaucoup d'espace mémoire. Les modèles déterministes de convertisseurs utilisés ne prennent pas en compte les imperfections éventuelles tels que les déséquilibres de tensions [LIN 98,CAV 98], les dissymétries des impédances de ligne et les imperfections liées aux circuits de commande.

1.2. Objectif

Le principal objectif visé dans ce mémoire est le développement de modèles probabilistes d'harmoniques caractéristiques et non caractéristiques produits par les redresseurs hexaphasés et dodécaphasés fonctionnant aléatoirement en régime déséquilibré. L'approche probabiliste est appliquée à l'étude d'une installation multi-convertisseurs fonctionnant aléatoirement.

1.3. Méthodologie

La méthodologie que nous allons suivre se résume en trois points.

- 1) Recherche de modèles analytiques simples des amplitudes et des phases des harmoniques et vérification de leur validité par simulation avec le logiciel Matlab.
- 2) Recherche d'expressions des densités de probabilité des amplitudes et des phases des harmoniques et comparaison aux résultats obtenus par simulation selon une méthode de Monté Carlo basée sur des modèles précis des harmoniques.
- 3) Validation de l'étude théorique développée à l'aide de mesures expérimentales.

Dans ce mémoire, on se propose d'étudier les perturbations harmoniques produites par des convertisseurs de puissance à commutation naturelle, en particulier hexaphasés et dodécaphasés, couramment utilisés dans les industries. Cette étude est abordée sous l'angle déterministe (Chapitre 2 et 3), puis étendue sous l'angle probabiliste (Chapitre 4, 5 et 6).

Dans le deuxième et le troisième chapitre, l'accent sera particulièrement mis sur la relation entre le déséquilibre des tensions triphasées et les spectres harmoniques du convertisseur. On utilisera le taux inverse vectoriel pour caractériser les déséquilibres de tension. Le module et la phase des harmoniques caractéristiques et non caractéristiques seront formulés en fonction du taux inverse. On proposera également un modèle simplifié permettant d'expliquer l'influence du déséquilibre de tension sur les spectres harmoniques.

Le quatrième et le cinquième chapitre s'attacheront à l'étude probabiliste des harmoniques produits par le convertisseur dont le point de fonctionnement varie aléatoirement et dont les tensions d'alimentations subissent un déséquilibre aléatoire. La notion de variable aléatoire sera introduite dans l'analyse afin d'en déduire les densités de probabilité du module et de la phase des courants

Chapitre 1

harmoniques. Les propriétés probabilistes des caractéristiques des harmoniques et non caractéristiques seront comparées. La simulation de Monte Carlo sera utilisée pour vérifier les résultats de cette analyse.

Le sixième chapitre étendra l'étude probabiliste d'un seul convertisseur au problème de plusieurs convertisseurs et plus précisément à la sommation des harmoniques probabilistes correspondants. Une méthode assez générale basée sur l'utilisation de la distribution normale bi-dimensionnelle (BND) nous permettra non seulement d'identifier les paramètres du modèle BND, mais aussi d'élucider le problème de corrélation entre le module et la phase des harmoniques. Là encore, la simulation de Monte Carlo sera utilisée pour valider la méthode.

Le dernier chapitre de ce mémoire s'intéressera à la comparaison des mesures expérimentaux avec les résultats obtenus par simulation de Monte Carlo.

Chapitre 2 : Modélisation déterministe des harmoniques produits par un convertisseur à six pulsations sous tensions déséquilibrées

2.1. Introduction

Ce chapitre présente l'analyse des harmoniques de courant produits par un pont de Graëtz triphasé à thyristors en régime déséquilibré. Les relations mathématiques entre les amplitudes, les phases des harmoniques de courant et le taux de déséquilibre de tensions sont présentés. Afin de rendre l'exposé clair, l'analyse d'un pont de graëtz triphasé en régime déséquilibré avec une commande individuelle faite par Wang et al [WAN 92] est présentée, suivie d'une analyse avec une commande équidistante. Cette analyse sera ensuite étendue à l'étude d'un convertisseur à douze pulsations. Comme cette étude s'intéresse surtout à l'influence du déséquilibre de tension sur le spectre harmonique des courants, bien que le déséquilibre des impédances en amont ait des effets directs sur les angles de commutation, certaines études ont montré que son influence sur la production harmonique du convertisseur était secondaire par rapport aux effets du déséquilibre des tensions [PIE 91], les hypothèses simplificatrices suivantes sont faites pour mettre en relief les effets du déséquilibre de tension:

- Les commutations sont instantanées;
- La réactance X_d côté continu est supposée assez grande pour que l'ondulation du courant continu puisse être négligée;
- Les formes d'onde des tensions d'alimentation sont purement sinusoïdales.

Chapitre 2

Le schéma équivalent utilisé pour l'analyse est celui de la figure 2.1, la charge est composée d'une résistance R_d , d'une réactance X_d et d'une source de tension E_c .

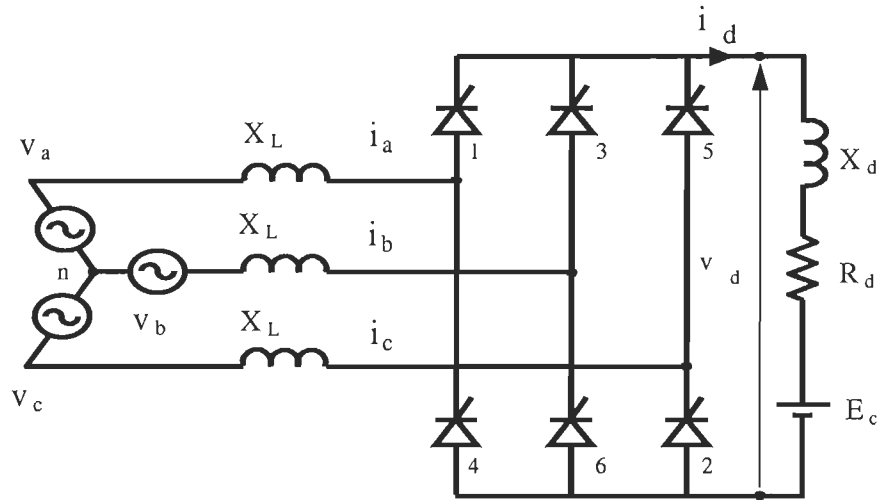


Figure 2.1: Schéma équivalent d'un redresseur triphasé

2.2. Modélisation du déséquilibre des tensions

Lorsque des récepteurs de constitution dissymétrique sont raccordés à des réseaux triphasés, ils absorbent des courants dont les intensités non identiques sur toutes les phases, donnent lieu à des déséquilibres de tensions. Pour de tels appareils, les calculs relatifs aux courants et tensions reposent sur l'utilisation de la méthode fort classique des coordonnées symétriques qui fait intervenir les composantes directes, inverses et homopolaires. À ce propos, il est opportun de se remémorer que les composantes homopolaires n'apparaissent que dans la mesure où le récepteur dissymétrique se trouve connecté au neutre du réseau d'alimentation.

Chapitre 2

Le système triphasé déséquilibré peut être caractérisé par plusieurs méthodes, la plus populaire utilise le taux de déséquilibre complexe, K_{UBF} défini par [PIE 87, YAC 81]:

$$K_{UBF} = \frac{\bar{V}_-}{\bar{V}_+} = \tau e^{j\theta} \quad (2.1)$$

Avec $j = \sqrt{-1}$; \bar{V}_+ et \bar{V}_- indiquent respectivement les séquences directe et inverse de tension; τ et θ représentent respectivement le module et la phase de K_{UBF} appelés aussi taux de déséquilibre et angle de déséquilibre. La séquence directe d'un système alternatif est généralement tirée des trois phases en utilisant un filtre et comparée avec une valeur de référence; ainsi la valeur efficace de la tension directe reste généralement proche de la valeur nominale. D'où la séquence positive peut être considérée constante et prise comme une tension de base (i.e. $V_+ = 1,0$ p.u.).

Considérant la tension de séquence directe comme base, la tension de séquence inverse a pour amplitude τ en p.u., et la tension simple en p.u. peut être donnée par [PIE 90] :

$$\bar{V}_a = 1.0 + \tau e^{j\theta} \quad (2.2)$$

$$\bar{V}_b = 1.0 e^{-j2\pi/3} + \tau e^{j(\theta-2\pi/3)} \quad (2.3)$$

$$\bar{V}_c = 1.0 e^{j2\pi/3} + \tau e^{j(\theta+2\pi/3)} \quad (2.4)$$

Alors les tensions composées en p.u sont :

Chapitre 2

$$\overline{U}_{ab} = \overline{V}_a - \overline{V}_b = \sqrt{3}[e^{j\pi/6} + \tau e^{j(\theta-\pi/6)}] \quad (2.5)$$

$$\overline{U}_{bc} = \overline{V}_b - \overline{V}_c = \sqrt{3}[e^{-j\pi/2} + \tau e^{j(\theta+\pi/2)}] \quad (2.6)$$

$$\overline{U}_{ca} = \overline{V}_c - \overline{V}_a = \sqrt{3}[e^{j5\pi/6} + \tau e^{j(\theta-5\pi/6)}] \quad (2.7)$$

La figure 2.2 montre comment la tension composée change à cause de la séquence inverse, l'amplitude U_{ab} peut être exprimée en fonction de τ et θ en appliquant la loi de cosinus.

$$U_{ab} = \sqrt{3}\sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau \cos(\theta - \pi/3)} \quad (2.8)$$

La déviation de phase de \overline{U}_{ab} par rapport au vecteur correspondant du système équilibré peut être déterminée en appliquant la loi de sinus :

$$\delta_{ab} = \sin^{-1} \frac{\tau \sin(\theta - \pi/3)}{\sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau \cos(\theta - \pi/3)}} \quad (2.9)$$

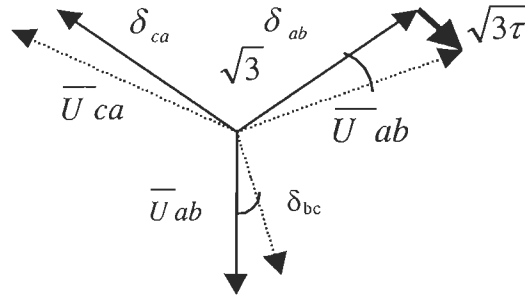


Figure 2.2: Angle de déviation de phase de la tension composée causé par la séquence inverse [WAN 92]

Chapitre 2

De la même manière , les angles de déviation de \overline{U}_{bc} et \overline{U}_{ca} sont donnés par :

$$\delta_{bc} = \sin^{-1} \frac{\tau \sin(\theta - \pi)}{\sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau \cos(\theta - \pi)}} \quad (2. 10)$$

$$\delta_{ca} = \sin^{-1} \frac{\tau \sin(\theta + \pi / 3)}{\sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau \cos(\theta + \pi / 3)}} \quad (2. 11)$$

Il convient de noter que δ_{ab}, δ_{bc} et δ_{ca} sont positifs ou négatifs suivant la position de la tension composée par rapport à l'origine.

2.3. Modélisation des harmoniques de courant sous tensions déséquilibrées

2.3.1. Commande individuelle

Les harmoniques produits par un convertisseur dépendent de la méthode de commande selon laquelle les impulsions d'amorçage des thyristors sont générées. Une méthode de commande couramment utilisée est la méthode de commande individuelle. Les thyristors sont déclenchés avec un retard d'angle α après la détection du passage par zéro de leur tension de synchronisation.

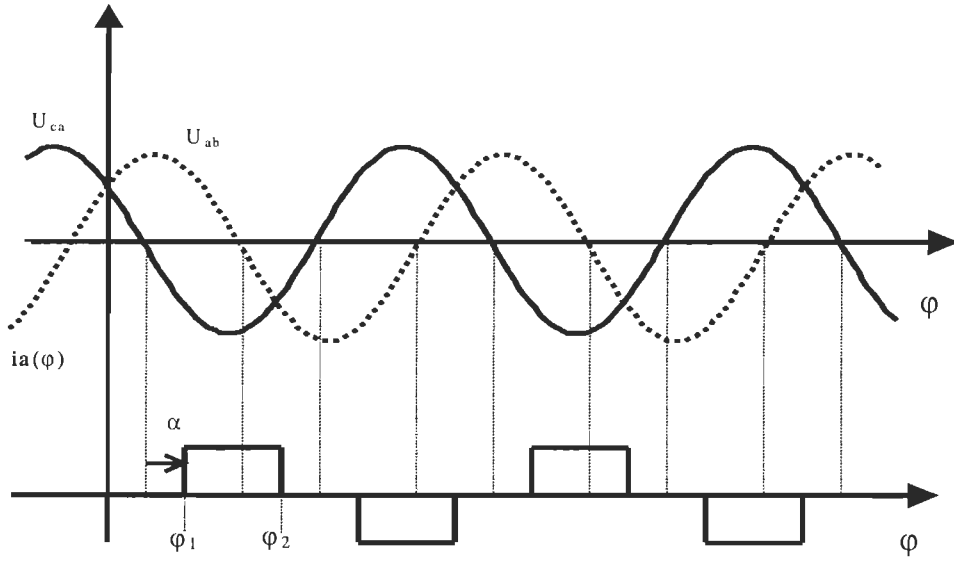


Figure 2.3: Tensions composées (U_{ab} et U_{ca}) et le courant correspondant dans la phase A

Les formes d'onde de la tension et de courant de la figure 2.3 montrent comment le courant de ligne $i_a(\varphi)$ dépend du passage par zéro des tensions U_{ab} et U_{ca} . Les grandeurs φ_1 et φ_2 repèrent respectivement les positions angulaires du début et de la fin de l'impulsion positive de courant. Si on prend, par exemple, le courant de la phase A, φ_1 et φ_2 correspondent aux angles de phase de U_{ca} et U_{ab} décalés de $(\alpha + 180)$. Il faut noter que, $i(\varphi) = -i(\varphi + \pi)$, grâce à la forme d'onde du courant demi-symétrique. La forme d'onde du courant peut être déterminée en fonction des paramètres φ_1, φ_2 et I_d . Le courant I_d dépend de la demande de la charge du convertisseur, φ_1 et φ_2 sont en effet les clés des paramètres à déterminer. La demi-symétrie du courant implique que seulement les harmoniques impairs existent. Le développement en série de Fourier de l'onde de courant montrée à la figure 2.3 donne la composante harmonique de rang h sous la forme complexe [WAN 92] :

Chapitre 2

$$\begin{aligned}\bar{I}_h &= 2\bar{c}_h = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} i(\varphi) e^{-jh\varphi} d\varphi = 2 \frac{I_d}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} i(\varphi) e^{-jh\varphi} d\varphi \\ &= \frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} e^{-\frac{jh(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}}\end{aligned}\quad (2.12)$$

\bar{c}_h réfère au coefficient de Fourier complexe. Si on utilise le sinus (plutôt que le cosinus) pour exprimer le courant instantané correspondant, la phase de I_h est corrigée de $\pi/2$ et \bar{I}_h s'écrit [WAN 92] :

$$\bar{I}_h = \frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} e^{-\frac{jh(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} + \frac{j\pi}{2}} \quad (2.13)$$

Lorsque les tensions sont équilibrées, $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi/3$, les harmoniques de rangs multiples de trois n'apparaissent pas. Lorsque les tensions sont déséquilibrées, $\varphi_2 - \varphi_1$ est légèrement plus grand ou plus petit que $2\pi/3$, ce qui fait apparaître les harmoniques non caractéristiques.

Pour calculer les valeurs de φ_1 et de φ_2 dans les différentes phases, le déphasage de la tension de ligne dû à la présence de la séquence inverse doit être considérée. Il suffit d'appliquer les équations (2.9) à (2.11) pour écrire les relations suivantes [WAN 92] :

$$\varphi_{1a} = \varphi_{2c} = (\alpha + \pi) - 5\pi/6 - \delta_{ca} = \alpha + \pi/6 - \delta_{ca} \quad (2.14)$$

$$\varphi_{1b} = \varphi_{2a} = (\alpha + \pi) - \pi/6 - \delta_{ab} = \alpha + 5\pi/6 - \delta_{ab} \quad (2.15)$$

$$\varphi_{1c} = \varphi_{2b} = (\alpha + \pi) - \pi/2 - \delta_{bc} = \alpha + 3\pi/2 - \delta_{bc} \quad (2.16)$$

Chapitre 2

Les indices a, b et c sont ajoutés pour indiquer la phase concernée dans le calcul de φ_1 et de φ_2 . Il est évident que l'analyse ci-dessus permet d'exprimer le courant harmonique de rang h comme une fonction explicite de τ et de θ . Par exemple, l'amplitude du courant de rang h dans la phase A est donnée par [WAN92] :

$$I_{ah} = \frac{4I_d}{h\pi} \left| \sin \frac{h(2\pi/3 + \delta_{ca} - \delta_{ab})}{2} \right| \quad (2.17)$$

et sa phase est :

$$\beta_{ah} = -h\alpha + \frac{(1-h)\pi}{2} + \frac{h(\delta_{ca} + \delta_{ab})}{2} + \pi(1 - U[\sin[h(\varphi_{2a} - \varphi_{1a})/2]]) \quad (2.18)$$

Le dernier terme contient la fonction d'Heaviside pour tenir compte du signe de $\sin[h(\varphi_{2a} - \varphi_{1a})/2]$. La fonction d'Heaviside est définie comme suit :

$$U(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

2.3.2. Commande équidistante

Avec la commande équidistante, les impulsions de commande sont produites généralement à partir d'un oscillateur dont la fréquence de fonctionnement est identique à celle du réseau d'alimentation. À chaque période, une impulsion de gâchette est référencée par rapport au passage par zéro d'une tension de ligne et les impulsions suivantes sont produites dans des intervalles de temps équidistants selon la période du réseau. Un thyristor est amorcé par un signal décalé de α degrés électriques (i.e. angle d'allumage) par rapport au passage à zéro de sa tension de commutation. Les instants d'allumage sont obtenus en décalant

Chapitre 2

l'impulsion de référence respectivement de 0, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°. Pour analyser le fonctionnement du pont à six pulsations avec la commande équidistante, la tension de ligne U_{ac} est utilisée pour la synchronisation. Il en résulte que lorsque la commande équidistante est utilisée $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi/3$. La fonction temporelle de I_h s'écrit :

$$\overline{I_h} = \frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h\pi}{3} e^{\frac{-jh(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} + \frac{j\pi}{2}}, \quad (h = 6k \pm 1) \quad (2.20)$$

L'amplitude du courant de rang h dans la phase A est donnée par :

$$I_h = \frac{4I_d}{h\pi} \sin \left| \frac{h\pi}{3} \right| = \frac{2\sqrt{3}I_d}{h\pi}, \quad (h = 6k \pm 1) \quad (2.21)$$

Et sa phase est :

$$\beta_{eah} = -\frac{h(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi(1 - U[\sin \frac{h\pi}{3}]) \quad (2.22)$$

2.4. Simplification du modèle

2.4.1. Relations des amplitudes de la commande individuelle

Le calcul des équations (2.17) à (2.18) ne présente pas de difficulté, mais il est préférable de les simplifier de sorte qu'un modèle approximatif sera obtenu et l'effet de déséquilibre de tension sur les harmoniques peut être facilement estimé. Les angles de déviation δ_{ab} , δ_{bc} et δ_{ca} sont normalement petits. Par conséquent, la fonction arc-sinus dans les équations (2.9) à (2.11) peut être rapprochée à son

Chapitre 2

argument puisque, le taux de déséquilibre τ est typiquement inférieur à 2% dans un système alternatif, le dénominateur dans les eqs. (2.9) à (2.11) peut être remplacé par l'unité sans causer d'erreurs significatives. La formule approximative des équations (2.9) à (2.11) peut être donnée par [WAN 92]:

$$\delta_{ab} \approx \tau \sin(\theta - \pi/3) \quad (2.23)$$

$$\delta_{bc} \approx \tau \sin(\theta - \pi) \quad (2.24)$$

$$\delta_{ca} \approx \tau \sin(\theta + \pi/3) \quad (2.25)$$

Il ressort des équations précédentes que les angles de déviation sont proportionnels au taux de déséquilibre et sont des fonctions sinusoïdales de θ . L'expression du courant harmonique peut également être simplifiée; l'amplitude du courant harmonique dans la phase A est donnée par :

$$I_{ha} = \frac{4I_d}{h\pi} \left| \sin \frac{h\pi}{3} \cos \frac{h(\delta_{ca} - \delta_{ab})}{2} + \cos \frac{h\pi}{3} \sin \frac{h(\delta_{ca} - \delta_{ab})}{2} \right| \quad (2.26)$$

La relation (2.26) peut être développée en distinguant les harmoniques caractéristiques ($h = 6k \pm 1$) et non caractéristiques ($h = 6k + 3$).

2.4.1.1. Harmoniques caractéristiques

Pour les harmoniques de rang $h = 6K \pm 1$, l'équation (2.26) peut être écrite [WAN 92] :

$$I_{ha} = \frac{4I_d}{h\pi} \left| \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{h(\delta_{ca} - \delta_{ab})}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{h(\delta_{ca} - \delta_{ab})}{2} \right| \quad (2.27)$$

Chapitre 2

Puisque les angles de déviation δ_{ab} et δ_{ca} sont petits, les approximations de premier ordre du cosinus et du sinus permettent d'obtenir l'expression suivante :

$$I_{ha} \approx \frac{2\sqrt{3}I_d}{h\pi} \pm \frac{I_d(\delta_{ca} - \delta_{ab})}{\pi} \quad (2.28)$$

En substituant les expressions de δ_{ab} , δ_{bc} et δ_{ca} données respectivement par (2.23), (2.24) et (2.25) dans (2.27) nous obtenons :

$$I_{ha} \approx \frac{2\sqrt{3}I_d}{h\pi} \pm \frac{\sqrt{3}I_d \tau \cos \theta}{\pi} = I_h^0 \pm \Delta I_h(\tau, \theta) \quad (2.29)$$

L'équation (2.29) donne une interprétation claire et utile de l'effet du déséquilibre de tension sur les harmoniques caractéristiques : I_h^0 représente le $h^{\text{ième}}$ harmonique généré sous une tension alternative idéale et $\Delta I_h(\tau, \theta)$ correspond aux harmoniques dus au déséquilibre de tension. La relation $I_h^0 = 2\sqrt{3}I_d / h\pi$ coïncide avec les analyses classiques des harmoniques générés par le convertisseur sans perturbation. La quantité $\Delta I_h(\tau, \theta)$ est proportionnelle à τ et varie périodiquement avec θ ; elle met en relief la contribution de la tension de séquence inverse sur la production des harmoniques caractéristiques. Il convient de noter que cette contribution est pratiquement indépendante du rang h .

2.4.1.2. Harmoniques non caractéristiques

Les harmoniques non caractéristiques résultant du déséquilibre de tension sont les harmoniques de rangs multiples de trois ($h = 6K + 3$). Pour ces harmoniques, l'équation (2.26) peut être simplifiée et nous obtenons [WAN 92] :

Chapitre 2

$$I_{ha} = \frac{4I_d}{h\pi} \left| \sin \frac{h(\delta_{ca} - \delta_{ab})}{2} \right| \approx \frac{2\sqrt{3}I_d\tau |\cos \theta|}{\pi} \quad (2.30)$$

Il ressort de l'équation (2.30) que les amplitudes des harmoniques non caractéristiques sont indépendantes du rang h et représentent le double de $\Delta I_h(\tau, \theta)$. Dans le cas où les filtres spécialisés n'ont pas été utilisés pour absorber les courants harmoniques non caractéristiques, la contribution du déséquilibre de tensions aux harmoniques de rangs multiples de trois devrait être soigneusement prise en considération.

2.4.2. Commande équidistante

D'après l'équation (2.21) l'amplitude I_h ne dépend pas du déséquilibre des tensions; le terme $\sin h\pi/3$ est toujours positif ce qui donne :

$$I_{ha} = \frac{18\sqrt{2}V \cos \alpha}{h\pi^2 R_d} \quad h = 6k \pm 1 \quad (2.31)$$

2.4.3. Relations de phases

2.4.3.1. Commande individuelle

La plupart des études se contentent de calculer l'amplitude des harmoniques. Toutefois, pour arriver à une compréhension complète de la nature des phénomènes, il est souhaitable de connaître aussi leur phase. L'équation (2.18) présente l'expression de la phase en fonction de τ et θ . Cette relation peut être simplifiée en utilisant les expressions approximatives de δ_{ab} et δ_{ca} décrites par les équations (2.23) et (2.25) [WAN 92] :

Chapitre 2

$$\beta_{ha} = -h\alpha + \frac{(1-h)\pi}{2} + \frac{h\tau \sin(\theta)}{2} - \pi \left(1 - U \left[\sin \left[h \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}\tau \cos(\theta)}{2} \right] \right] \right) \quad (2.32)$$

Pour les harmoniques caractéristiques de rang $6k \pm 1$, on peut montrer à l'aide de l'équation (2.32) qu'en faisant varier θ de 0° à 360° , leurs phases varient continuellement suivant une fonction sinusoïdale. Par contre, pour les harmoniques non caractéristiques de rang $6K+3$, leurs phases subissent une discontinuité lorsque l'argument de la fonction d'Heaviside U passe d'une valeur négative à une valeur positive et vice versa. Cette discontinuité n'intervient pas pour les harmoniques caractéristiques, parce que la variation de θ ne provoque pas le changement de signe de l'argument de la fonction U .

2.4.3.2. Commande équidistante

Avec la commande équidistante le système triphasé de courant est équilibré. Le terme $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha + \pi + 2\delta_{ca}$, et l'équation (2.22) devient :

$$\beta_{eah} = \left\{ \pi - \left(\pm \frac{\pi}{2} - h \left[\alpha - \tau \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \right) \right\} \quad ; \quad h = 6k \pm 1; \quad (2.33)$$

2.5. Comparaison entre les modèles simplifiés et les modèles de base

Les modules des courants harmoniques absorbés par le convertisseur sous les deux commandes, individuelle et équidistante, sont tracés en fonction de l'angle de déséquilibre θ sur les figures 2.4 à 2.5 où les courbes calculées par le modèle exacte et le modèle simplifié sont superposées. Pour comparer ces deux modèles, seuls les harmoniques dans la phase A sont représentés et le point de fonctionnement du convertisseur est défini par : $\alpha=15^\circ$, $\tau = 5\%$, $E_c=0$, $R_d=1.0$ p.u.

Chapitre 2

Lorsque la commande est équidistante, les harmoniques non-caractéristiques disparaissent, les harmoniques caractéristiques ne sont pas influencés par le déséquilibre des tensions.

La commande individuelle se distingue de la commande équidistante par la présence des harmoniques non caractéristiques, on constate que les harmoniques caractéristiques varient autour de la contribution de tension directe (i.e, l'harmonique caractéristique sous des tensions équilibrées). Les deux modèles coïncident lorsque le rang harmonique est bas, tel qu'illustré par la figure (2.4). De plus il faut mentionner que les expressions approximatives de δ_{ab} , δ_{bc} , et δ_{ca} données respectivement par les équations (2.23) à (2.25) supposent que τ est faible, ce qui entraîne que les deux modèles coïncident d'autant mieux que τ est petit, voir figure 2.5.

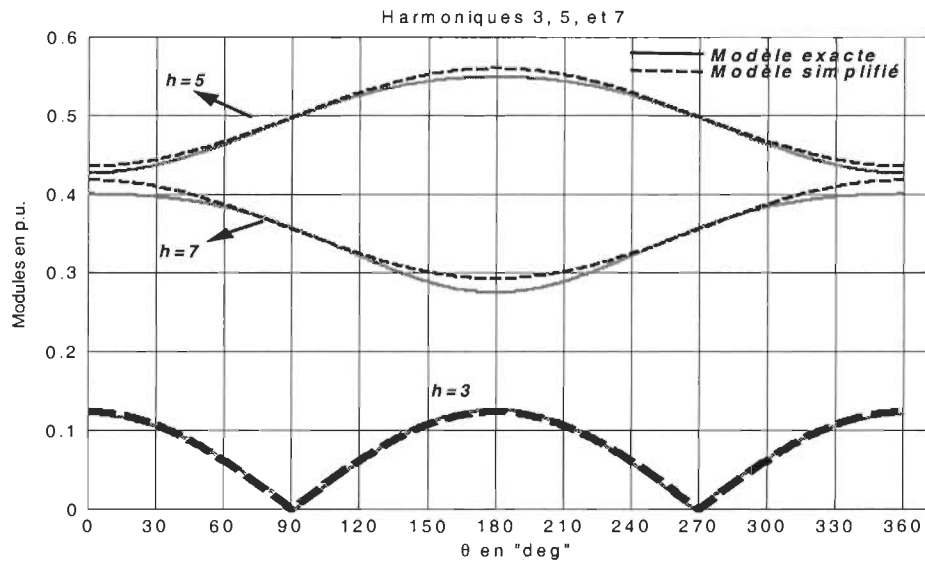


Figure 2.4: Variation des courants harmoniques (phase A) avec θ ; (Commande individuelle, $\alpha = 15^\circ$, $\tau = 5\%$)

Chapitre 2

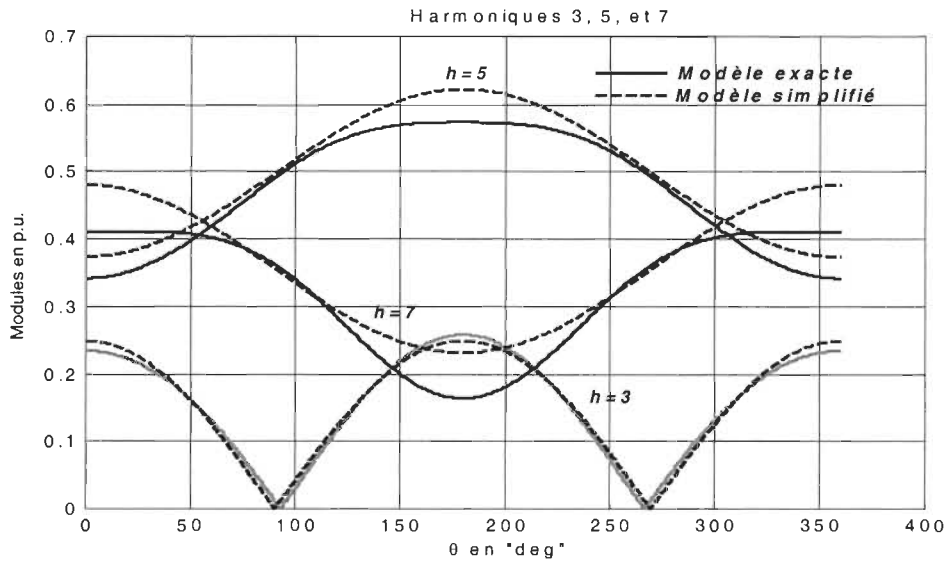


Figure 2.5: Variation des courants harmoniques (phase A) avec θ ; (Commande individuelle, $\alpha = 15^\circ$, $\tau = 10\%$)

La variation des phases en fonction de θ est indiqué sur les figures 2.6 et 2.7. La différence entre les deux modèles est inappréciable, avec la commande individuelle, la phase de l'harmonique 3 connaît deux discontinuités à 90° et 270° où un changement brutal de la phase de $\pm 180^\circ$ se produit.

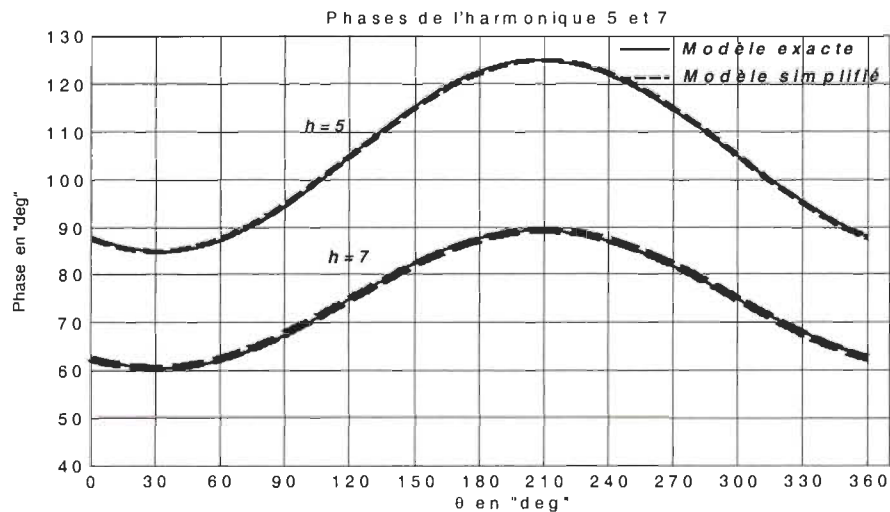


Figure 2.6: Variations des phases des courants harmoniques (phase A) avec θ (commande équidistante)

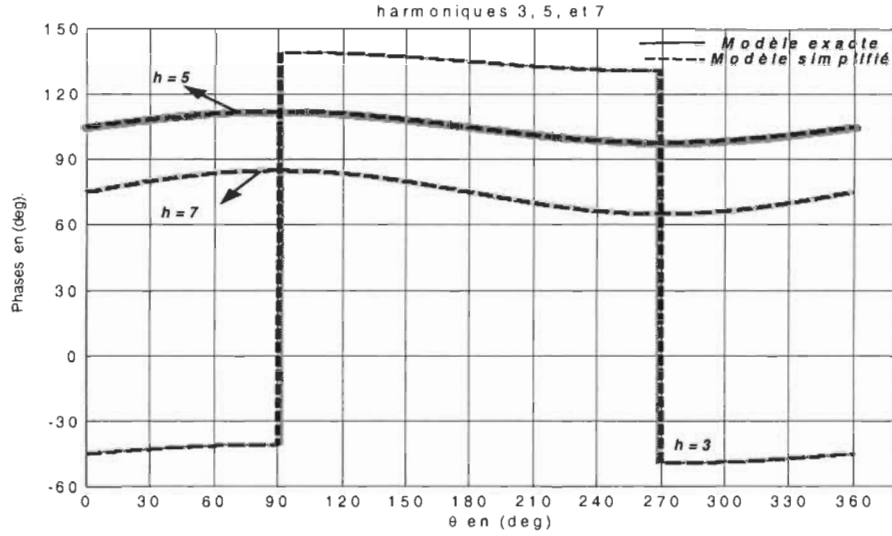


Figure 2.7: Variations des phases des courants harmoniques (phase A) avec θ (Commande individuelle)

2.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un modèle analytique (modèle de base), permettant de déterminer le spectre du courant absorbé par un convertisseur à six pulsations alimenté par un système triphasé de tensions déséquilibrées. Les modules et les phases des harmoniques sont exprimés en fonction des paramètres τ et θ sous une forme explicite en considérant la commande individuelle et la commande équidistante. À l'aide de ce modèle, les courants harmoniques peuvent être aisément obtenus si τ et θ sont connus. Un modèle simplifié déduit du modèle exact a été aussi présenté. Ce modèle, quoique très simple, permet d'interpréter plus facilement les effets respectifs des paramètres τ , α et θ sur le spectre harmonique.

Il convient de rappeler que le déséquilibre de l'harmonique 3 est intrinsèquement élevé et indépendant du niveau de déséquilibre de tension (τ), tandis que les harmoniques 5 et 7, quoique beaucoup moins déséquilibrés que l'harmonique 3, présentent un déséquilibre non négligeable qui dépend de τ .

Chapitre 3 : Modélisation analytique des harmoniques produits par un convertisseur à douze pulsations sous tensions déséquilibrées

3.1. Introduction

Les convertisseurs CA/CC sont de plus en plus utilisés dans des applications industrielles. Il est bien connu que les harmoniques provoquent des dysfonctionnements de certains appareils tels que les relais de protection électroniques, le vieillissement prématuré d'isolants, le claquage de condensateurs, des erreurs d'instruments de mesure...etc. Par conséquent, la génération des harmoniques par les convertisseurs statiques est devenue un sujet très important. Le niveau de distorsion des harmoniques dépend principalement de la structure du convertisseur, du type de commande utilisée, des caractéristiques de la source et de la charge. Les convertisseurs dodécaphasés sont largement utilisés dans des applications de fortes puissances telles qu'en transport à courant continu à haute tension (HVDC), les machines de grande puissance, et les alimentations de puissance. L'utilisation des convertisseurs ca/cc (alternatif à continu) à douze pulsations ou convertisseurs dodécaphasés est fréquente pour les charges de fortes puissances en raison de leur génération minimale de distorsion harmonique par rapport au convertisseur à six pulsations standard.

La prédiction des courants harmoniques produits par les convertisseurs à douze pulsations a déjà fait l'objet de plusieurs études. La plupart des modèles harmoniques des convertisseurs disponibles dans la littérature sont dédiés à l'analyse des performances des convertisseurs sous des conditions normales de fonctionnement. Sous des conditions non idéales de fonctionnement tels que le déséquilibre des tensions, les impédances de commutation asymétriques et les

Chapitre 3

erreurs des angles d'amorçage, la simulation numérique est souhaitable pour l'analyse des courants harmoniques [KIT 81]. Des relations mathématiques simples entre le déséquilibre des tensions et les harmoniques de courant sont présentées au chapitre 2 en considérant un convertisseur à six pulsations et une commande individuelle. Il est connu que sous des conditions de fonctionnement non idéales, le convertisseur dodécaphasé génère en plus des harmoniques de rang $12k \pm 1$, des harmoniques de courants de rang 5 et 7 de valeurs non négligeables (typiquement 3% à 6% du courant de charge) [PHA 68- REE 68- CAR 93- GON 85- HAN 89].

Dans ce chapitre, un modèle analytique simple des modules et des phases des courants harmoniques générés par un convertisseur dodécaphasé avec une commande équidistante sera présenté en considérant que l'inductance côté continu est assez élevée et que les angles de commutation sont nuls. Des résultats de simulation seront présentés pour montrer la validité du modèle proposé.

Il existe plusieurs configurations de convertisseur à douze pulsations. Toutefois, dans plusieurs applications, un transformateur unique avec un primaire (couplé en triangle ou en étoile) et deux secondaires (l'un en étoile et l'autre en triangle) est utilisé. Le convertisseur dodécaphasé, faisant l'objet d'analyse dans ce chapitre, est obtenu par la connexion en série de deux convertisseurs à six pulsations. Ils sont alimentés par les couplages secondaires étoile et triangle d'un transformateur, dont le primaire est couplé en triangle tels qu'illustrés à la figure 3.1. La connexion des enroulements du transformateur, permet d'obtenir deux systèmes triphasés de tensions déphasés par un angle électrique de 30 degrés.

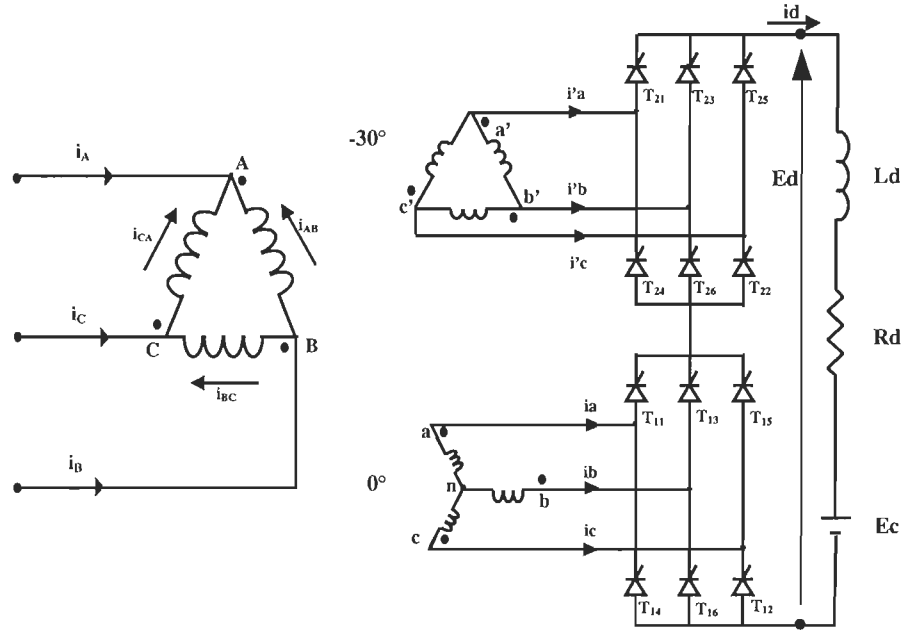


Figure 3.1: Convertisseur à douze pulsations

3.2. Harmoniques de courants produits par un convertisseur à douze pulsations sous tensions déséquilibrées

Considérant une commande équidistante et supposant que la tension composée U_{ac} est utilisée comme tension de synchronisation du premier pont et que la tension composée $U_{a'c'}$ est la tension de synchronisation du deuxième pont, les conditions d'amorçage sont déterminées par $\omega t = \gamma_1 + \alpha$ pour le premier pont et $\omega t = \gamma'_1 + \alpha$ pour le deuxième pont tel qu'illustré à la figure 3.2, α représente l'angle d'amorçage, γ_1 et γ'_1 représentent respectivement les angles de passage par zéro de U_{ac} et $U_{a'c'}$.

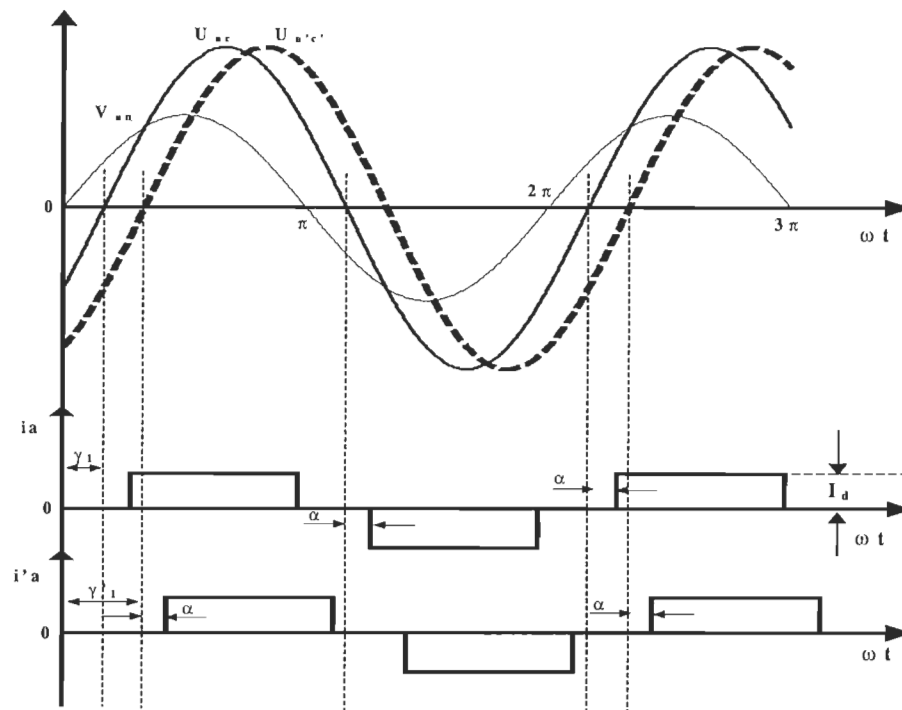


Figure 3.2: Tensions V_{an} , U_{ac} , $U_{a'c'}$ et les courants i_a et i'_a

Pour décrire le comportement des harmoniques de courants produits par le convertisseur dodécaphasé, le déséquilibre des tensions est défini par « le taux de déséquilibre ». Les tensions de séquences directe et inverse sont des paramètres appropriés qui facilitent la représentation de l'effet du déséquilibre de tension sur le comportement du convertisseur, les tensions de séquence homopolaire n'ont pas d'effet sur le comportement du convertisseur. Prenant la tension directe comme référence. Le facteur de déséquilibre complexe est défini dans le chapitre 2 comme suit :

$$K_{UBF} = \frac{V_-}{V_+} \angle \theta = \tau \angle \theta \quad (3.1)$$

Chapitre 3

Où , V_- et V_+ sont les modules des composantes inverse et directe; τ et θ sont le taux de déséquilibre et l'angle de déséquilibre. Le rapport de transformation est choisi de sorte que :

$$V_{an} / U_{AB} = 1 \quad (3.2)$$

$$U_{ab'} / U_{AB} = \sqrt{3} \quad (3.3)$$

Il est connu que si la composante directe est déphasée de Δ , alors la composante inverse subit un déphasage de $-\Delta$. Supposant que le déséquilibre des tensions d'alimentation du premier pont est caractérisé par un taux de déséquilibre τ et un angle de déséquilibre θ , et des erreurs négligeables sur les rapports de transformation, il s'ensuit que les tensions simples relatives à chaque pont peuvent s'exprimer par :

$$\begin{cases} V_{an} = \sqrt{2}V \sin(\omega t) + \sqrt{2}V \sin(\omega t + \theta) \\ V_{bn} = \sqrt{2}V \sin(\omega t - 2\pi/3) + \sqrt{2}V \sin(\omega t + \theta + 2\pi/3) \\ V_{cn} = \sqrt{2}V \sin(\omega t + 2\pi/3) + \sqrt{2}V \sin(\omega t + \theta - 2\pi/3) \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} V_{ab'} = \sqrt{2}V \sin(\omega t + \Delta) + \sqrt{2}V \sin(\omega t + \theta - \Delta) \\ V_{bb'} = \sqrt{2}V \sin(\omega t + \Delta - 2\pi/3) + \sqrt{2}V \sin(\omega t + \theta - \Delta + 2\pi/3) \\ V_{cb'} = \sqrt{2}V \sin(\omega t + \Delta + 2\pi/3) + \sqrt{2}V \sin(\omega t + \theta - \Delta - 2\pi/3) \end{cases} \quad (3.5)$$

où, V_{an} , V_{bn} et V_{cn} , réfèrent aux tensions simples du premier pont et les tensions

$V_{a'n'}$, $V_{b'n'}$ et $V_{c'n'}$ réfèrent à ceux du deuxième pont.

Chapitre 3

On peut montrer que, si la composante directe est prise comme tension de base (i.e. égale à 1 p.u.) et comme référence de phase, les angles de passage par zéro γ_n , $n \in \{1, 2, 3\}$, des tensions composées U_{ac} , U_{ba} et U_{cb} respectives et donné dans [NGA 2000], peuvent être exprimées en fonction du taux de déséquilibre τ et de l'angle de déséquilibre θ sa phase comme suit [NGA 2000] :

$$\gamma_{n, n \in \{1, 2, 3\}} = \tan^{-1} \frac{-\cos(2n\pi/3) + \tau \cos(\theta + 2n\pi/3)}{\sin(2n\pi/3) + \tau \sin(\theta + 2n\pi/3)} \quad (3. 6)$$

Les angles de passage par zéro γ'_n , $n \in \{1, 2, 3\}$, des tensions composées $U_{a'c'}$, $U_{b'a'}$ et $U_{c'b'}$ respectives, sont aussi exprimées en fonction de τ et θ comme suit :

$$\gamma'_{n, n \in \{1, 2, 3\}} = \tan^{-1} \frac{-\cos(\Delta - 2n\pi/3) + \tau \cos(\theta - \Delta + 2n\pi/3)}{-\sin(\Delta - 2n\pi/3) + \tau \sin(\theta - \Delta + 2n\pi/3)} \quad (3. 7)$$

Sous tensions équilibrées (i.e. τ est égale à 0), les angles de passage par zéro γ_n , $n \in \{1, 2, 3\}$, et γ'_n , $n \in \{1, 2, 3\}$, sont donnés par:

$$\gamma_{n, n \in \{1, 2, 3\}} = \tan^{-1} \frac{-\cos(2n\pi/3)}{\sin(2n\pi/3)} = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \quad (3. 8)$$

$$\gamma'_{n, n \in \{1, 2, 3\}} = \tan^{-1} \frac{-\cos(\Delta - 2n\pi/3)}{-\sin(\Delta - 2n\pi/3)} = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \Delta \quad (3. 9)$$

Chapitre 3

Prenant δ_n , $n \in \{1, 2, 3\}$ comme le déphasage introduit dans les angles de passage par zéro des tentions de commutation à cause de la présence de la composante inverse, les relations suivantes entre les déphasages et les angles de passage par zéro peuvent être écrites:

$$\delta_{n, n \in \{1,2,3\}} = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \gamma_{n, n \in \{1,2,3\}} \quad (3.10)$$

$$\delta'_{n, n \in \{1,2,3\}} = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \Delta - \gamma'_{n, n \in \{1,2,3\}} \quad (3.11)$$

δ_n , $n \in \{1, 2, 3\}$ et δ'_n , $n \in \{1, 2, 3\}$ indiquent les écarts des passages par zéro des tentions composées par rapport à leurs positions angulaires normales. On peut établir que [NGA 2000]:

$$\delta_{n, n \in \{1,2,3\}} = \tan^{-1} \frac{-(-1)^n \tau \sin(\theta + n\pi/3)}{1 - (-1)^n \tau \cos(\theta + n\pi/3)} \quad (3.12)$$

$$\delta'_{n, n \in \{1,2,3\}} = \tan^{-1} \frac{-(-1)^n \tau \sin(\theta + \pi/3 + n\pi/3)}{1 - (-1)^n \tau \cos(\theta + \pi/3 + n\pi/3)} \quad (3.13)$$

Dans les sections qui suivent, une commande équidistante est considérée et la tension composée U_{ac} est utilisée comme tension de synchronisation du premier pont, tandis que la tension composée $U_{a'c'}$ est utilisée comme tension de synchronisation du deuxième pont. Ainsi les conditions d'allumage sont déterminées par $\omega t = \gamma_I + \alpha$ pour le premier pont et $\omega t = \gamma'_I + \alpha$ pour le deuxième pont. Les

Chapitre 3

formes d'ondes des courants sont tracées sur la figure 3.2. La décomposition en série de Fourier de l'onde de courant montré à la figure 3.2 donne les expressions des courants harmoniques instantanées dans les phases a et a' des deux ponts :

$$i_{ah} = \frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h\pi}{3} \cos h \left(\omega t + \delta_1 - \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.14)$$

$$i_{a'h} = \frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h\pi}{3} \cos h \left(\omega t + \delta_1 - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (3.15)$$

I_d est la valeur moyenne du courant continu; Où, $h = 6k \pm 1$, $k=1,2,3,\dots$

De la même manière, les expressions des courants harmoniques instantanées dans les phases b, c, c' et c' des deux ponts respectivement peuvent être établies [NGA 2000].

On peut établir que le courant primaire instantané du convertisseur dodécaphasé dans la phase A est donné par :

$$i_A = i_a - i_c + \sqrt{3} i_{a'} \quad (3.16)$$

Les expressions décrivant les courants primaires instantanés dans les phases B et C sont déterminées de la même façon [NGA 2000].

3.2.1. Harmoniques produits par le convertisseur à douze pulsations

L'expression instantanée de l'harmonique de courant primaire de rang $h=12k\pm1$, $k=1,2,3,\dots$, de la phase A produit par le convertisseur dodécaphasé de la figure 3.1 est donnée par [NGA 2000] :

$$i_{Ah} = \pm \frac{12I_d}{h\pi} \cosh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \cos h\left(\omega t + \frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.17)$$

Les écarts des passages par zéro δ_n $n \in \{1,2,3\}$ et δ'_n $n \in \{1,2,3\}$ créés par le déséquilibre de tension sont données par les relations (3.10) et (3.11).

À partir de l'équation (3.17), l'amplitude et la phase de l'harmonique de courant de rang h peuvent être obtenues :

$$I_{Ah} = \frac{12I_d}{h\pi} \left| \cosh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \right| \quad (3.18)$$

$$\psi_{Ah} = h\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - \pi \left\{ 1 - U\left[\pm \cosh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right)\right] \right\} \quad (3.19)$$

Où U est la fonction d'Heaviside définie par l'équation (2.19).

3.2.2. Harmoniques non caractéristiques produits par le convertisseur à douze pulsations

L'expression instantanée de l'harmonique de courant de rang $h=12k-6\pm1$, $k=1,2,3,\dots$, produit par le convertisseur à douze pulsations dans la phase primaire A est donnée par :

Chapitre 3

$$J_{Ah} = \pm \frac{12I_d}{h\pi} \sinh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \sinh\left(\omega t + \frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.20)$$

À partir de l'équation (3.20), l'amplitude et la phase de l'harmonique de courant de rang h peuvent s'écrire sous les formes suivantes [NGA 2000] :

$$J_{Ah} = \frac{12I_d}{h\pi} \left| \sinh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \right| \quad (3.21)$$

$$\varphi_{Ah} = h\left(\frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{2} - \pi \left\{ 1 - U\left[\pm \sinh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right)\right] \right\} \quad (3.22)$$

3.3. Simplification du modèle

Les écarts δ_n et δ'_n , $n \in \{1,2,3\}$ sont normalement petits, puisque le déséquilibre des tensions est généralement inférieur à 2% dans un réseau électrique. Alors, les équations (3.2) et (3.3) deviennent :

$$\delta_{n, n \in \{1,2,3\}} \approx -(-1)^n \tau \sin(\theta + n\pi/3) \quad (3.23)$$

$$\delta'_{n, n \in \{1,2,3\}} \approx -(-1)^n \tau \sin(\theta + \pi/3 + n\pi/3) \quad (3.24)$$

3.3.1. Harmoniques caractéristiques de rang $h=12k \pm 1$

Les équations (3.18) et (3.19) peuvent être simplifiées en utilisant (3.23) et (3.24) pour obtenir des approximations du module et de la phase de l'harmonique de rang h .

$$I_{Ah} \approx \frac{12I_d}{h\pi} \quad (3.25)$$

$$\psi_{Ah} \approx h \left(\frac{\sqrt{3}\tau \cos \theta}{2} - \alpha - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (3.26)$$

3.3.2. Harmoniques non- caractéristiques de rang $h=12k-6\pm1$

Les équations (3.21) et (3.22) peuvent être simplifiées en utilisant (3.23) et (3.24) pour obtenir des approximations du module et de la phase de l'harmonique de rang h .

$$J_{Ah} = \frac{6I_d}{\pi} |\tau \sin \theta| \quad (3.27)$$

$$\varphi_{Ah} = h \left(\frac{\sqrt{3}\tau \cos \theta}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{2} - \pi \left\{ 1 - U \left[\pm h \left(\frac{\tau \sin \theta}{2} \right) \right] \right\} \quad (3.28)$$

Des formules similaires peuvent être obtenues pour les phases B et C.

3.4. Résultats de simulation

Les variations des modules et des phases des 5^{ème}, 7^{ème}, 11^{ème} et 13^{ème} harmoniques dans la phase A en fonction de θ sont tracées sur les figures (3.3), (3.4), (3.5) et (3.6), où le point de fonctionnement du convertisseur dodécaphasé est défini par $\alpha=15^\circ$, $\tau=0.03$, $E_c=0$, et $R_d=1\text{p.u.}$. La discontinuité de la variation de la phase des harmoniques non caractéristiques ($h=5$ et $h=7$) est claire dans les figures (3.3) et (3.4).

Le modèle simplifié donné par les équations (3.27) et (3.28) s'accorde avec le modèle de base défini par l'équation (3.20).

Une erreur non significative entre le modèle simplifié donné par les équations (3.25) et (3.26) et le modèle de base défini par l'équation (3.17) est observée. Les principales causes de cette erreur sont attribuables au rang élevé des harmoniques et à l'approximation du premier ordre du cosinus utilisée dans l'équation (3.17);

Chapitre 3

la figure 3.7 montre les variations des modules des harmoniques caractéristiques avec une approximation de second ordre du cosinus, l'erreur est négligeable en comparaison avec l'approximation du premier ordre du cosinus.

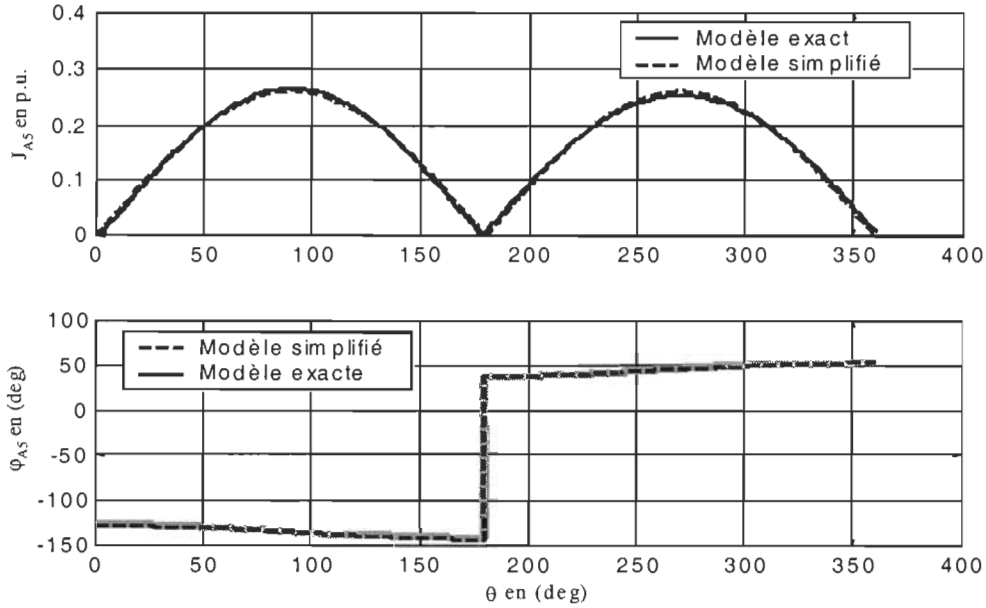


Figure 3.3 : Variations du module et de la phase du courant harmonique de rang 5 avec θ ; $\alpha = 15^\circ$, $\tau=3\%$, $E_c=0$ et $R_d=1.0$ p.u.

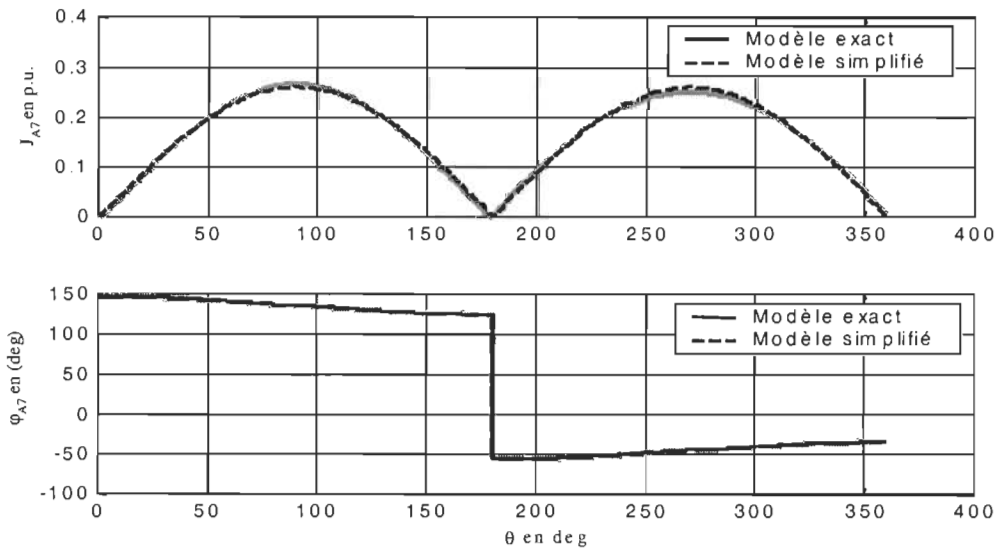


Figure (3.4) : Variations du module et de la phase du courant harmonique de rang 7 avec θ ; $\alpha = 15^\circ$, $\tau=3\%$, $E_c=0$ et $R_d=1.0$ p.u.

Chapitre 3

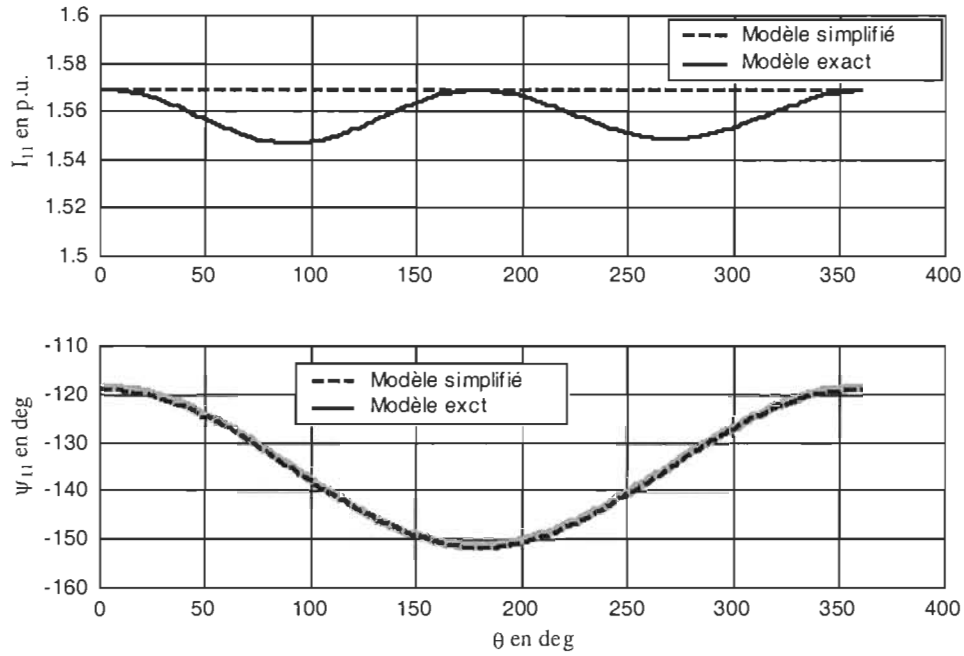


Figure 3.5 : Variations du module et de la phase du courant harmonique de rang 11 avec θ ; $\alpha = 15^\circ$, $\tau=3\%$, $E_c=0$ et $R_d=1.0$ p.u.

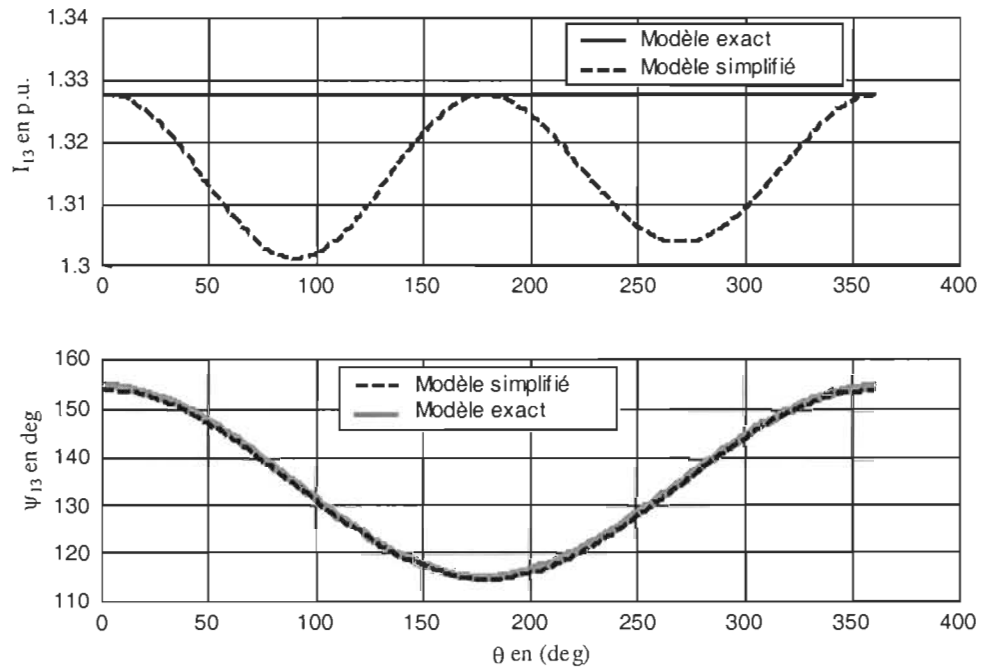


Figure 3.6 : Variations du module et de la phase du courant harmonique de rang 13 avec θ ; $\alpha = 15^\circ$, $\tau=3\%$, $E_c=0$ et $R_d=1.0$ p.u.

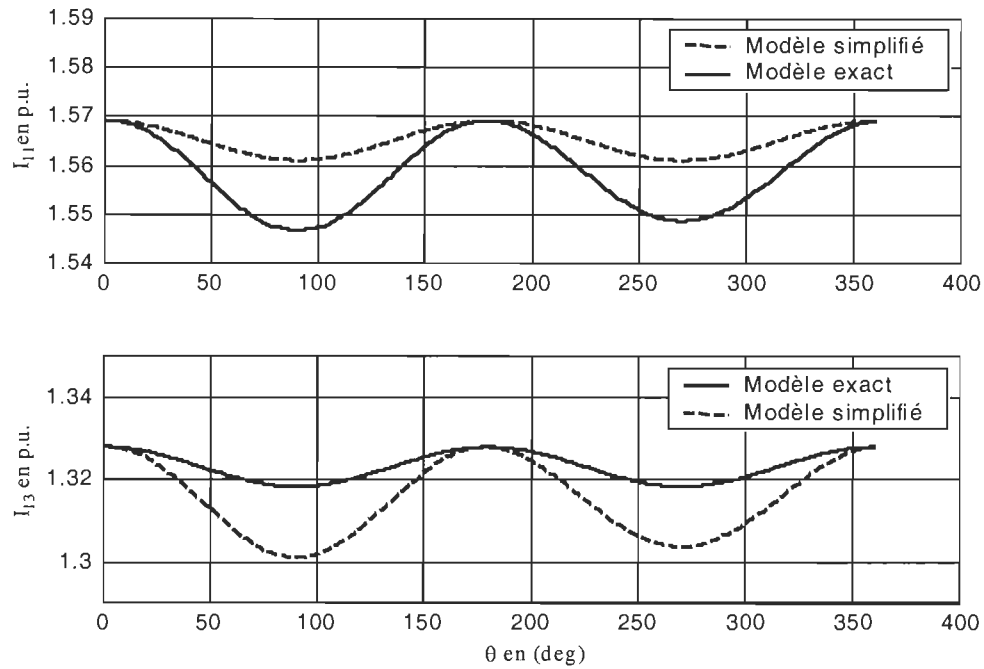


Figure 3.7 : Variations du module du courant harmonique de rang 11 et 13 avec θ ;
 $\alpha = 15^\circ$, $\tau=3\%$, $E_c=0$ et $R_d=1.0$ p.u.

3.5. Conclusion

Ce chapitre présente une méthode efficace pour calculer les harmoniques caractéristiques et non-caractéristiques produits par un convertisseur à douze pulsations sous tensions déséquilibrées lorsque le taux de déséquilibre est inférieur ou égal à 3%. À partir du modèle analytique, il est plus facile d'analyser la variation des modules et des phases des courants harmoniques sous tensions déséquilibrées. Les résultats de simulation confirment la validité des approximations. Les modèles des courants harmoniques proposés sont utiles pour la conception des filtres.

Chapitre 4 : Modélisation probabiliste d'un convertisseur à six pulsations en régime déséquilibré

4.1. Introduction

La modélisation probabiliste des harmoniques est un sujet important mais encore peu connu. Cependant, de plus en plus d'études remarquent que les harmoniques circulant dans le réseau sont soumis à des variations aléatoires dues à la consommation fluctuante de la puissances électrique par les charges non-linéaires. Plusieurs articles concernant la mesure des niveaux d'harmoniques relatifs à la clientèle ont d'une part souligné le besoin des études probabilistes afin de tenir compte de ces variations aléatoires [CRU 89- EMA 86- ORT 88], et d'autre part signalé que les normes et les recommandations actuelles basées sur l'approche déterministe étaient trop conservatrices. Les courants harmoniques sont mal représentés par l'approche déterministe qui calcule en général des niveaux correspondant à des conditions d'opérations typiques, ceci sans tenir compte du phénomène de compensation statistique. Les résultats ainsi obtenus conduisent souvent à surdimensionner des composants tels que, filtres d'harmoniques, transformateurs, câbles, etc..

Dans ce chapitre, l'analyse présentée dans [WAN 93] est reprise afin de rendre la compréhension claire et sera appliquée par la suite à l'analyse probabiliste du convertisseur à douze pulsations. Les simulations sont effectuées avec Matlab. Une modélisation probabiliste des harmoniques émis par le convertisseur soumis à des fluctuations de charge et au déséquilibre de la tension d'alimentation est présentée. L'étude probabiliste utilise deux approches: l'analyse et la simulation de Monte Carlo. L'analyse consiste à introduire la notion de variable aléatoire dans les modèles analytiques développés au premier chapitre ; ce qui permettra de

Chapitre 4

prendre en considération des variations aléatoires de certaines variables essentielles, notamment l'angle d'amorçage α ainsi que le module et la phase du taux inverse (τ et θ). Les densités de probabilité des courants harmoniques caractéristiques et non caractéristiques peuvent être obtenues à partir des densités de probabilité de ces variables (α, τ, θ). La simulation de Monte Carlo a pour but de vérifier les résultats analytiques.

4.2. Modèle du convertisseur

Dans le chapitre 1, des modèles de base et des modèles simplifiés ont été élaborés afin de calculer les courants harmoniques produits par le convertisseur fonctionnant sous une tension déséquilibrée. Les modèles simplifiés seront utilisés dans ce chapitre pour l'analyse probabiliste des harmoniques, tandis que la simulation de Monte Carlo utilisera les modèles de base, plus précis, pour vérifier les résultats analytiques. Afin de faciliter la compréhension, on réécrit les formules suivantes :

$$I_{he} = \frac{2\sqrt{3}I_d}{h\pi}; \quad h = 6k \pm 1 \quad (4.1)$$

$$\Phi_{he} = \left\{ \pi - \left(\pm \frac{\pi}{2} - h \left[\alpha - \tau \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2} \right] \right) \right\} \quad ; \quad h = 6k \pm 1; \quad (4.2)$$

$$I_{hd} \approx \frac{2\sqrt{3}I_d}{h\pi} \pm \frac{\sqrt{3}I_d \tau \cos \theta}{\pi} = I_h^0 \pm \Delta I_h(\tau, \theta); \quad h = 6k \pm 1 \quad (4.3)$$

$$\beta_{hd} = -h\alpha + \frac{(1-h)\pi}{2} + \frac{h\tau \sin(\theta)}{2} \pm \frac{\pi}{2}; \quad h = 6k \pm 1 \quad (4.4)$$

$$J_{hd} = \frac{4I_d}{h\pi} \left| \sin \frac{h(\delta_{ca} - \delta_{ab})}{2} \right| \approx \frac{\sqrt{3}I_d \tau |\cos \theta|}{\pi}; \quad h = 6k - 3 \quad (4.5)$$

$$\varphi_{hd} = -h\alpha + \frac{(1-h)\pi}{2} + \frac{h\tau \sin(\theta)}{2} - \pi \left(1 - U \left[\sin \left[h \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}\tau \cos(\theta)}{2} \right] \right] \right); \quad h = 6k - 3 \quad (4.6)$$

Chapitre 4

Dans ce système d'équations I_d est le courant de charge continu, α l'angle d'amorçage, U la fonction d'Heaviside; I_{hd} et β_{hd} représentent respectivement l'amplitude et la phase de l'harmonique caractéristique d'ordre h ($h=6k\pm1= 5, 7, 11 \dots$); J_{hd} et φ_{hd} représentent respectivement l'amplitude et la phase de l'harmonique non caractéristique d'ordre h ($h=6k-3= 3, 9, 15 \dots$); l'indice « d » est utilisé pour la commande individuelle; I_{he} et ϕ_{he} représentent respectivement l'amplitude et la phase de l'harmonique caractéristique d'ordre h ($h=6K\pm1= 5, 7, 11 \dots$) sous la commande équidistante. Le courant I_d est réglé par l'angle α afin de répondre à l'appel de puissance consommée par la charge continue du convertisseur. La relation entre I_d et α dépend donc de cette charge. Si, par exemple, la charge est un moteur à courant continu, cette relation dépend aussi de la caractéristique couple-vitesse de la machine entraînée. Pour simplifier l'analyse tout en conservant sa généralité, on suppose une charge purement résistive du côté continu du convertisseur. Ainsi, la méthode d'analyse est applicable à une charge quelconque dès que la relation reliant I_d et α est connue. Comme le déséquilibre de tension n'affecte pas significativement le courant continu, celui-ci s'écrit:

$$I_d = V_d / R_d = (3\sqrt{6}V \cos \alpha) / (\pi R_d) \quad (4.7)$$

où, $V_d = (3\sqrt{6}V \cos \alpha) / \pi$ est la tension continue du convertisseur, V la tension simple d'alimentation en valeur efficace et R_d la résistance de la charge continue. En cas de déséquilibre de la tension d'alimentation triphasée, V est assimilée à la valeur moyenne des trois tensions simples ou à la valeur de la tension directe. L'introduction de l'équation (4.7) dans les équations (4.1), (4.3) et (4.5) donne:

$$I_{hd} = C_d \cos \alpha \left(\frac{2}{h} \pm \tau \cos \theta \right) \quad (4.8)$$

$$J_{hd} = 2C_d \cos \alpha \tau |\cos \theta| \quad (4.9)$$

$$I_{he} = C_e \cos \alpha \quad (4.10)$$

Chapitre 4

Avec :

$$C_e = 18\sqrt{2}V / (h\pi^2 R_d) \quad (4.11)$$

$$C_d = 9\sqrt{2}V / (\pi^2 R_d) \quad (4.12)$$

C_e et C_d sont des constantes.

Il convient de noter que les amplitudes (I_{hd} , J_{hd} et I_{he}) sont exprimées en fonction de α , τ et θ . L'avantage de cette formulation réside dans le fait que les causes des variations aléatoires des harmoniques sont entièrement représentées par les trois variables α , τ et θ . En effet, la variation de α reflète la fluctuation de la charge du convertisseur; les variations de τ et θ représentent le déséquilibre aléatoire de tension.

Si un réseau triphasé est structurellement symétrique, c'est-à-dire que les impédances du réseau sont équilibrées, alors les déséquilibres des tensions sont uniquement provoqués par l'inégalité de consommation des puissances électriques sur les trois phases. Dans ce cas, on peut montrer que τ et θ obéissent respectivement, en régime stationnaire, à des distributions de Rayleigh et uniforme [PIE 93]. La densité de probabilité de α est déterminée par le comportement probabiliste de la charge du convertisseur. On suppose que α suit une loi uniforme entre α_1 et α_2 , ce qui est une bonne approximation car α est sûrement borné et qu'une telle loi englobe sous une forme simple les divers cas spécifiques rencontrés dans la réalité (par exemple, on peut, à partir d'une combinaison des lois uniformes, obtenir des lois plus élaborées: triangulaire, trapézoïdale, gaussienne...).

Chapitre 4

Ainsi, les densités de probabilité des variables aléatoires α , τ et θ s'écrivent:

$$f_{\alpha}(\alpha) = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}; \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \quad (4.13)$$

$$f_{\tau}(\tau) = \left(\frac{\tau}{\sigma^2} \right) \exp \left[\frac{-\tau^2}{2\sigma^2} \right]; \tau \geq 0 \quad (4.14)$$

$$f_{\theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi}; 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (4.15)$$

où l'écart type σ est défini par : $E[\tau] / \sqrt{\pi/2}$.

4.3. Densité de probabilité des amplitudes harmoniques

On va d'abord analyser les caractéristiques probabilistes des amplitudes harmoniques. On distingue trois cas différents: (1) charge aléatoire et tensions parfaitement équilibrées; (2) charge fixée et déséquilibre aléatoire des tensions; (3) charge et déséquilibre des tensions aléatoires. Le premier cas correspond à un convertisseur alimenté par une source idéale, mais son point de fonctionnement varie aléatoirement. Dans le deuxième cas, la perturbation de tension inverse intervient dans la production des harmoniques aléatoires. Le troisième cas traite de l'interaction de ces deux causes.

4.3.1. Charge aléatoire et tensions équilibrées

4.3.1.1. Commande équidistante

Si les tensions triphasées sont équilibrées (i.e. $\tau=0$) et l'angle d'amorçage des thyristors α est uniformément distribué sur l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$, la densité de probabilité des amplitudes harmoniques peut se trouver de la manière suivante :

Chapitre 4

Soit la fonction $g(\alpha)$ définie par :

$$g(\alpha) = I_{he} = C_e \cos \alpha \quad (4.16)$$

Si $C_e < |I_{he}|$ l'équation (4.16) n'a pas de solution;

Si $C_e > |I_{he}|$ l'équation (4.16) a plusieurs solutions

$$\alpha_i = \arccos \frac{I_{he}}{C_e} \quad ; \quad i = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (4.17)$$

$$\text{alors : } g'(\alpha_i) = C_e \cdot \sin(\alpha_i) = \sqrt{C_e^2 - I_{he}^2} \quad (4.18)$$

Ainsi, la densité de probabilité $f_{I_{he}}(I_{he})$ s'écrit [PAP 91] :

$$f_{I_{he}}(I_{he}) = \frac{1}{\sqrt{C_e^2 - I_{he}^2}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_{\alpha}(\alpha_i); \quad |I_{he}| < C_e \quad (4.19)$$

puisque α est uniforme sur l'intervalle $[\alpha_1 \alpha_2]$, $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_{\alpha}(\alpha_i) = 1/\Delta\alpha$ et l'équation

(4.19) devient :

$$f_{I_{he}}(I_{he}) = \frac{1}{\Delta\alpha} \frac{1}{\sqrt{C_e^2 - I_{he}^2}}; \quad |I_{he}| < C_e \quad (4.20)$$

Avec,

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (4.21)$$

La figure 4.1 illustre comment $f_{I_{he}}(I_{he})$ varie avec différentes valeurs de α_1 et de α_2 . Les paramètres de simulations sont les suivantes : $V=1.0$ p.u. ; $R_d=1.0$ p.u. ; On remarque que lorsque $\alpha_1=0$, la densité $f_{I_{he}}(I_{he})$ tend vers l'infini pour

$$I_{he} = 2C_e/h.$$

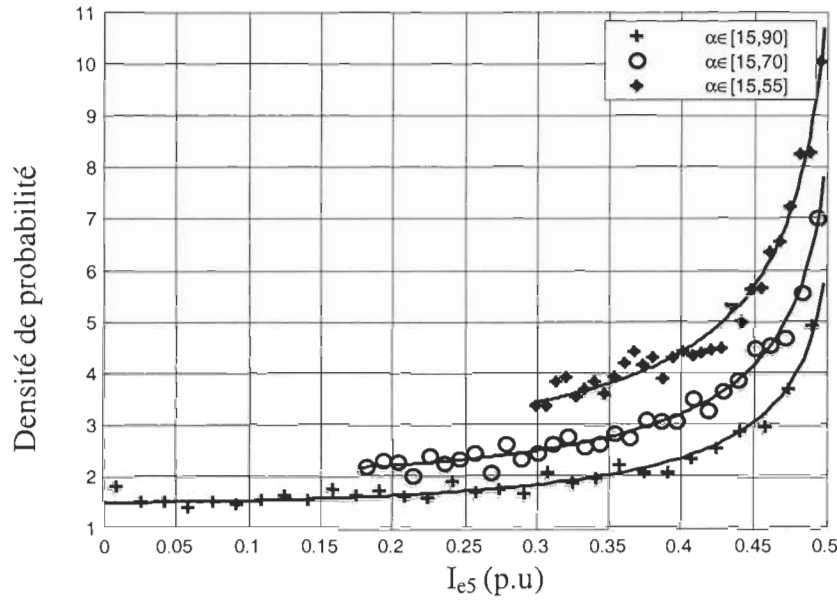


Figure 4.1: Densité de probabilité de I_{e5} pour différents intervalles de variations de α ; — Expressions analytiques

4.3.1.2. Commande individuelle

Quand la tension triphasée est équilibrée, c'est-à-dire $\tau=0$, l'équation (4.8) devient $I_{hd}=(2C_d \cos \alpha)/h$. La variable α est uniformément distribuée entre α_1 et α_2 , et I_{hd} est une fonction de α , il s'ensuit que la densité de probabilité de I_{dh} peut être calculée de la même manière qu'au paragraphe 4.3.1.1 :

$$f_{I_{hd}}(I_{hd}) = \frac{1}{\Delta\alpha \sqrt{(2C_d/h)^2 - I_{hd}^2}} \quad (4.22)$$

Avec,

$$\frac{2C_d \cos \alpha_2}{h} < I_{hd} < \frac{2C_d \cos \alpha_1}{h}; h = 6k \pm 1 \text{ et } \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

4.3.2. Charge fixée et déséquilibre aléatoire des tensions

Si θ et τ sont des variables aléatoires obéissant respectivement à des lois uniforme et de Rayleigh, les densités de I_{hd} et J_{hd} peuvent être exprimées selon [WAN 93] par :

$$f_{I_{hd}}(I_{hd}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{I_{hd} - \mu_h}{\sigma'}\right)^2\right]; h = 6K \pm 1 \quad (4.23)$$

$$f_{J_{hd}}(J_{hd}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{J_{hd}}{\sigma'}\right)^2\right]; J_{hd} > 0; h = 6K - 3 \quad (4.24)$$

avec,

$$\mu_h = (2C_d \cos \alpha) / h \quad (4.25)$$

$$\sigma' = (C_d \cos \alpha) \sigma \quad (4.26)$$

4.3.3. Charge et déséquilibre aléatoires

Quand la charge et le déséquilibre des tensions sont tous deux aléatoires, les densités de I_{dh} et J_{dh} peuvent être calculées en considérant le produit de deux variables aléatoires indépendantes [WAN 93] :

$$f_{I_{hd}}(I_{hd}) dI_{hd} = \int_{C_v \cos \alpha_2}^{C_v \cos \alpha_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\Delta\alpha q \sqrt{C_d^2 - q^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{I_{hd}}{q} - \frac{2}{h}}{\sigma}\right)^2\right] dq \quad (4.27)$$

$$f_{J_{hd}}(J_{hd}) = \int_{2C_v \cos \alpha_2}^{2C_v \cos \alpha_1} \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma\Delta\alpha q \sqrt{4C_d^2 - q^2}} \exp\left(-\frac{J_{hd}^2}{2\sigma^2 q^2}\right) dq \quad (4.28)$$

On notera que les analyses présentées dans les paragraphes 4.3.1 et 4.3.2 sont les cas particuliers qui découlent de (4.27) et (4.28). Il est alors évident que les

densités de probabilité (4.22) et (4.23) peuvent être obtenues à partir de (4.27), et que la densité (4.24) peut être obtenue à partir de (4.28).

4.4. Densité de probabilité des phases harmoniques

La plupart des études concernant la modélisation probabiliste des harmoniques s'intéressent aux amplitudes, mais elles se contentent de supposer que les phases harmoniques sont uniformément réparties sur un certain intervalle. Ceci résulte du fait que le modèle déterministe des phases n'existait pas jusqu'alors [WAN 92] et que par ailleurs le calcul probabiliste des phases est relativement plus difficile. Il faut souligner que la modélisation des phases est aussi importante que celle des amplitudes pour l'étude des harmoniques car la combinaison des harmoniques est en fait une sommation vectorielle [KAZ 89]. L'évaluation de la résultante ne peut être correctement déterminée que si la connaissance de l'amplitude et de la phase de tous les vecteurs harmoniques est suffisante. En effet, la diversité des phases harmoniques joue un rôle essentiel dans ce problème. Tout comme pour la modélisation des amplitudes, l'analyse se déroulera en distinguant les trois cas examinés précédemment.

4.4.1. Charge aléatoire et tensions équilibrées

4.4.1.1. Commande équidistante

Dans ce cas le déséquilibre est nul ($\tau=0$), on détermine les phases des harmoniques caractéristiques de rang $6k\pm 1$ lorsque la variable α est aléatoire, l'équation (4.2) devient :

$$\Phi_{he} = \left\{ \pi - \left(\pm \frac{\pi}{2} - h \left[\alpha + \frac{\pi}{2} \right] \right) \right\} \quad h = 6k \pm 1; \quad (4.29)$$

Chapitre 4

Φ_{he} peut se mettre sous la forme :

$$\Phi_{he} = a\alpha + b = g(\alpha); \quad g'(\alpha) = a \quad (4.30)$$

Avec, $a = h$ et $b = \pi \pm \frac{\pi}{2} + h\frac{\pi}{2}$

l'équation $\Phi_{eh} = a\alpha + b$ a une seule solution $\alpha = (\Phi_{he} - b)/a$ pour tout Φ_{he} par conséquent [PAP 91]:

$$f_{\Phi_{he}}(\Phi_{he}) = \frac{1}{|a|} f_{\alpha}\left(\frac{\Phi_{he} - b}{a}\right) \quad (4.31)$$

4.4.1.2. Commande individuelle

On note que quand $\tau=0$, d'après l'équation (4.4) la phase β_{hd} est une transformée linéaire de α . La densité de probabilité de β_{hd} peut être facilement obtenue par:

$$f_{\beta_{hd}}(\beta_{hd}) = \frac{1}{h\Delta\alpha}; (-h\alpha_2 - h\pi/2 \pm \pi/2) < \beta_{hd} < (-h\alpha_1 - h\pi/2 \pm \pi/2); h = 6k \pm 1 \quad (4.32)$$

On remarque que β_{hd} est uniformément distribué entre $(-h\alpha_2 - h\pi/2 \pm \pi/2)$ et $(-h\alpha_1 - h\pi/2 \pm \pi/2)$.

4.4.2. Charge fixée et déséquilibre aléatoire des tensions

4.4.2.1. Commande équidistante

Dans ce cas, l'influence du déséquilibre de tension qui suit une loi de Rayleigh est prise en compte. L'équation (4.2) devient :

Chapitre 4

$$\Phi_{he} = C'_e + h\tau \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \quad (4.33)$$

avec :

$$C'_e = \pi \pm \frac{\pi}{2} + h\alpha + \frac{h\pi}{2} \quad (4.34)$$

Soit les deux variables aléatoires X et Y définies par :

$$X = \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \text{ et } Y = \tau \quad (4.35)$$

Puisque que θ est uniformément réparti sur $[0, 2\pi]$, la densité de probabilité de X s'écrit:

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad \text{avec } |x| < 1 \quad (4.36)$$

la densité de probabilité de Y s'écrit :

$$f_Y(y) = \frac{\tau}{\sigma^2} \exp[-\tau^2/(2\sigma^2)], \quad \tau \geq 0 \quad (4.37)$$

Soit $Z=g(X,Y)$ et $W=f(X,Y)$, la densité de probabilité $f_{zw}(z,w)$, est donnée par [PAP 91] :

$$f_{zw}(z,w) = \frac{f_{xy}(x,y)}{|J(x,y)|}; \quad (4.38)$$

Chapitre 4

où la matrice Jacobienne $J(x,y)$ est définie par :

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}; \quad (4.39)$$

Posons :

$$\begin{cases} Z = XY \\ W = X \end{cases} \quad (4.40)$$

$$\text{alors } |J(x,y)| = |-X| = |X|$$

avec $|J(x,y)|$ qui représente le déterminant de la matrice $J(x,y)$.

Le fait que les deux variables X et Y soient indépendantes permet d'écrire :

$$f_{xy}(x,y) = f_x(x)f_y(y); \quad (4.41)$$

L'insertion de l'équation (4.41) dans (4.38) donne :

$$f_{zw}(z,w) = \frac{1}{\pi^2 \sigma^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{w^2}}} \exp - \frac{w^2}{2\sigma^2} \quad (4.42)$$

Pour trouver la densité de probabilité $f_z(z)$, il suffit d'intégrer l'équation (4.42) par rapport à la variable aléatoire W ce qui donne :

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2 \sigma^2 \sqrt{1 - \frac{z^2}{w^2}}} \exp - \frac{w^2}{2\sigma^2} dw; \quad (4.43)$$

Chapitre 4

Soit le changement de variable suivant :

$$\mu = \sqrt{\frac{w^2 - z^2}{\sigma^2}}; \quad d\mu = \frac{w}{\sigma \sqrt{w^2 - z^2}} dw \quad (4.44)$$

Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x\mu^2) d\mu = \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ et insérant (4.44) dans (4.43), la forme finale

suivante de la densité $f_z(z)$ est obtenue :

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.45)$$

D'après l'équation (4.33), nous avons :

$$\Phi_{he} = C'_e + hZ = g(Z); \quad g'(Z) = h \quad (4.46)$$

L'équation $\Phi_{eh} = g(Z)$ a une seule solution :

$$Z = \frac{\Phi_{he} - C'_e}{h} \quad (4.47)$$

Finalement, suivant l'analyse faite en 4.4.1.1, la densité de Φ_{eh} est donnée par :

$$f_{\Phi_{he}}(\Phi_{he}) = \frac{1}{|h|} f_z\left(\frac{\Phi_{he} - C'_e}{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma h)} \exp\left(-\frac{(\Phi_{he} - C'_e)^2}{2(\sigma h)^2}\right); \quad (4.48)$$

4.4.2.2. Commande individuelle

Les densités de β_{hd} et φ_{hd} s'écrivent sous la forme suivante [WAN 93] :

$$f_{\beta_{hd}}(\beta_{hd}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_{hd} - \mu_{\beta_{hd}}}{\sigma_h}\right)^2\right] \quad (4.49)$$

$$f_{\varphi_{hd}}(\varphi_{hd}) = \frac{1}{2} [f_w(\varphi_{hd} + \pi/2) + f_w(\varphi_{hd} - \pi/2)] \quad (4.50)$$

avec,

$$f_w(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{w - \mu_w}{\sigma_h}\right)^2\right] \quad (4.51)$$

$$\sigma_h = h\sigma/2 \quad (4.52)$$

$$\mu_{\beta_{hd}} = -h\alpha - h\pi/2 \pm \pi/2 \quad (4.53)$$

4.4.3. Charge et déséquilibre aléatoires des tensions

4.4.3.1. Commande équidistante

Lorsque la charge et le déséquilibre des tensions sont en même temps aléatoires, l'équation (4.2) peut s'écrire comme la somme de deux variables aléatoires X et Y :

$$\Phi_{he} = X + Y \quad \text{avec} \quad X = h\alpha \quad \text{et} \quad Y = \pi - h\tau \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + \frac{h\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \quad (4.54)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{h\Delta\alpha}; \quad h\alpha_1 < x < -h\alpha_2 \quad (4.55)$$

$$f_Y(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y - m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (4.56)$$

Chapitre 4

avec, $m = \pi + \frac{h\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ et $\sigma' = -h\sigma$

$$f_{\Phi_{he}}(\Phi_{he})d\Phi_{he} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Phi_{he} - y, y)dyd\Phi_{he} \quad (4.57)$$

Puisque X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on peut écrire :

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad (4.58)$$

L'insertion de (4.58) dans (4.57) donne :

$$f_{\Phi_{he}}(\Phi_{he}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\Phi_{he} - Y)f_Y(Y)dY = \frac{1}{\sqrt{2\pi h\Delta\alpha\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{Y-m}{\sqrt{2\sigma}}\right)^2\right) dY; \quad \Phi_{he} > 0 \quad (4.59)$$

$$f_{\Phi_{he}}(\Phi_{he}) = -\frac{1}{2h\Delta\alpha} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\Phi_{he} - h\alpha_1 - m}{\sqrt{2\sigma}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\Phi_{he} - h\alpha_2 - m}{\sqrt{2\sigma}}\right) \right] \quad (4.60)$$

4.4.3.2. Commande individuelle

Les densités de probabilité de β_{hd} et de φ_{hd} peuvent être obtenues par la convolution de $f_x(x)$ et $f_y(y)$, mais une autre méthode plus simple consiste à appliquer la transformation de Laplace L sur $f_x(x)$ et $f_y(y)$ [WAN 92] :

$$f_{\beta_{hd}}(\beta_{hd}) = L^{-1}\{L[f_x(x)].L[f_y(y)]\} = \frac{1}{2h\Delta\alpha} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\beta_{hd} + \lambda_2}{\sqrt{2\sigma_h}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\beta_{hd} + \lambda_1}{\sqrt{2\sigma_h}}\right) \right] \quad (4.61)$$

$$f_{\varphi_{hd}}(\varphi_{hd}) = \frac{1}{4h\Delta\alpha} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\varphi_{hd} + a_2}{\sqrt{2\sigma_h}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\varphi_{hd} + a_1}{\sqrt{2\sigma_h}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\varphi_{hd} + b_2}{\sqrt{2\sigma_h}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\varphi_{hd} + b_1}{\sqrt{2\sigma_h}}\right) \right] \quad (4.62)$$

où $\lambda_1 = h\alpha_1 - ((-h\pi/2) \pm \pi/2)$, $\lambda_2 = h\alpha_2 - ((-h\pi/2) \pm \pi/2)$, erf signifie la fonction d'erreur [ABR 72] et

$$a_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{h\pi}{2} + h\alpha_2; a_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{h\pi}{2} + h\alpha_1; b_2 = -\frac{\pi}{2} + \frac{h\pi}{2} + h\alpha_2; b_1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{h\pi}{2} + h\alpha_1.$$

Les densités de probabilité du paragraphe 4.3 permettent de retrouver, par un calcul aux limites, les densités de β_{hd} , φ_{hd} et de Φ_{he} correspondant aux cas analysés dans les paragraphes 4.1 et 4.2

4.4.4. Densités de probabilité des phases définies sur le cercle

Jusqu'à présent les densités de probabilité des phases ont été exprimées à partir d'une extension du modèle déterministe, c'est-à-dire en ne fixant aucune contrainte relative aux intervalles de variations angulaires. De ce fait, les phases φ_h et β_h peuvent être distribuées sur des intervalles supérieurs à 2π , surtout pour les harmoniques d'ordre élevé. Cependant, sur un plan physique, la phase d'un vecteur doit être bornée dans un intervalle tel que $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, +\pi]$. Pour tenir compte de cette contrainte, il convient de définir une densité équivalente sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Prenons la densité de β_h comme exemple. Sa densité équivalente sur $[0, 2\pi]$ peut être approchée par une transformation tenant compte de la périodicité d'ordre 2π [WAN 92]:

$$\hat{f}_{\beta_h}(\beta_h) = \sum_{m=m_1}^{m_2} f_{\beta_h}(2m\pi + \beta_h); 0 \leq \beta_h \leq 2\pi \quad (4.63)$$

où m est un entier et m_1 et m_2 sont tels que:

$$2m_1\pi \leq \beta_h \leq 2m_2\pi \quad (4.64)$$

4.5. La méthode de Monte Carlo

La publication source de la méthode de Monte Carlo est de N. Metropolis et S. Ulam, intitulé « The Monte Carlo Method » [MET 49]. Autre publication importante [HAM 64], traitant en particulier de l'optimisation de la méthode au moyen de techniques visant à amoindrir la variance des estimés.

Le recours à la méthode Monte Carlo a souvent pour but d'évaluer une quantité Q , cette quantité pouvant dépendre d'un ou de plusieurs paramètres. Cette évaluation revient presque toujours à une intégration. Or, l'intégration mathématique (analytique) peut être impossible, très ardue, ou hors des ressources du chercheur. On peut néanmoins obtenir un estimé par un procédé quelconque, comportant ou non des aspects aléatoires. La méthode Monte Carlo constitue une telle famille de procédés à ingrédients aléatoires.

4.5.1. Méthode aveugle « Monte Carlo »

Les méthodes de Monte Carlo sont maintenant couramment utilisées dans de très nombreux champs d'applications, qui peuvent avoir très peu en commun. Ces méthodes impliquent essentiellement la génération de nombre pseudo-aléatoires, qui sont mis en forme selon certaines fonctions de densité de probabilité (pdf.) que l'on associe à un système. Comme applications typiques de ce type de méthodes on peut notamment citer : Conception de réacteurs nucléaires, processus impliqués dans la chromodynamique quantique, radiothérapie, gestion du trafic routier, évolution stellaire en astrophysique, prévision du comportement de la bourse, exploration pétrolière, Conception VLSI de cartes électroniques.

Les différents éléments majeurs d'un système de simulation Monte Carlo sont essentiellement les suivants :

Chapitre 4

- ✓ Un ensemble de fonctions de densité de probabilité décrivant le système à simuler.
- ✓ Un générateur de nombres pseudo-aléatoires disposant de certaines propriétés de comportement statistique, de préférence sur $[0,1]$ c'est à dire un "générateur aléatoire uniforme".
- ✓ Une règle d'échantillonnage (sampling rule) afin d'échantillonner les nombres aléatoires disponibles en fonction des fonctions de densité de probabilité.
- ✓ Un système de variables pour compter les valeurs d'intérêt du système que l'on désire étudier. Un système d'estimation statistique des erreurs, en fonction notamment du nombre d'essais.
- ✓ Des méthodes de réduction de variance dans les valeurs d'intérêt, afin de pouvoir réduire le temps de calcul.
- ✓ Éventuellement des méthodes pour permettre à l'algorithme d'être parallélisé pour une exécution efficace sur une infrastructure performante.

4.5.2. Méthodes d'intégration numérique

Dans notre étude de l'intégration Monte Carlo, nous ne pouvons passer sous silence les méthodes usuelles d'intégration, utilisées en sciences appliquées depuis des décennies. Le lecteur pourra consulter plusieurs ouvrages là-dessus; mentionnons notamment l'excellent *Applied numerical analysis*, par C. F. Gerald et P. O. Wheatley (Addison-Wesley, 1984). Nous nous contenterons ici d'effleurer le sujet, afin de faire valoir de façon convaincante l'argument suivant: n'utiliser la méthode Monte Carlo que si rien d'autre n'est possible.

L'intégration numérique exploite le principe dit d'exhaustion, connu dès avant Archimède, et qui consiste à décomposer la surface à intégrer ($=Q$) en un grand nombre de petits morceaux approximatifs et disjoints. Chaque morceau est une approximation d'un morceau d'intégrale Q_i , l'erreur d'approximation étant

(généralement) proportionnelle à la taille du morceau Q_i et inversement proportionnelle à n .

4.5.3. La méthode des trapèzes (et la moyenne de fonctions)

La méthode des trapèzes consiste à définir chaque morceau de l'intégrale considérée comme un trapèze, de base b et de hauteur moyenne $1/2b[g(x_i)+g(x_i+b)]$, la surface du trapèze étant le produit des deux, $\hat{Q}_i = 1/2b[g(x_i) + g(x_i + b)]$. En découpant l'intégrale en morceaux d'intervalles x égaux et en sommant les morceaux, on obtient l'estimé global:

$$\hat{Q}_{ni} = b \sum g(x_i) - 1/2b[g(x_1) + g(x_n)]$$

expression dans laquelle, rappelons-le, x n'est pas aléatoire et $x_1 = X_{\min}$, $x_n = X_{\max}$, $b = (x_{\max} - x_{\min})/(n-1)$ et $x_i = x_{\min} + b(i-1)$. Le terme principal $bg(x)$, est approché par:

$$\hat{Q}(n) \approx \sum g(x_i) / n * (x_{\max} - x_{\min})$$

4.5.4. La méthode des arcs paraboliques

Parmi les méthodes d'intégration numérique simples, la méthode dite de Simpson, ou méthode des arcs de cercle, est l'une des meilleures. Ici, au lieu d'approximer la ligne de la fonction par une droite afin de former un trapèze, on emploie un arc de cercle et on obtient une section de parabole. Soit trois coordonnées: $(x_1; y_1)$; $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, on conçoit qu'une fonction du second degré, $y = Ax^2 + Bx + C$, passe exactement par ces coordonnées, et la surface de la section de parabole est donnée par $F(x_3) - F(x_1)$, où $F(x) = Ax^3/3 + Bx^2/2 + Cx + D$ (D étant une constante superflue). Si les coordonnées sont à égales distances en x , soit $(x_{i+1} - x_i) = b$, l'algèbre se simplifie et la surface d'un "morceau" \hat{Q} désigné est $b[y_1 + 4y_2 + y_3]/3$.

Chapitre 4

On divise le domaine de l'intégrale à estimer en n segments égaux (n étant pair), produisant les $n+1$ coordonnées $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ où $x_0 = \min(x)$ et $x_n = \max(x)$. Alors l'estimé global se calcule selon:

$$\hat{Q}(n) = \frac{x_n - x_0}{3n} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

la précision de cette méthode étant supérieure à celle des trapèzes. En fait, l'erreur d'approximation est d'ordre $1/n^5$, alors que celle des trapèzes varie plutôt comme $1/n^3$.

4.6. Simulation de Monte Carlo

Un programme basé sur la méthode de Monte Carlo a été écrit en vue de simuler le comportement probabiliste des harmoniques produits par le convertisseur à six pulsations. Le modèle de base du convertisseur développé dans le chapitre 2 est utilisé parce que ce modèle est plus précis et que sa programmation ne présente pas de difficultés particulières. Le programme fait 10^4 tirages pour toutes les variables aléatoires simulées α, τ et θ avant de calculer les histogrammes "empiriques" des fonctions résultantes ($I_{hd}, I_{he}, J_{hd}, \beta_{hd}, \phi_{hd}, \Phi_{he}$). Les tirages aléatoires de la méthode de Monte Carlo sont assimilés à des observations statistiques d'une distribution sous-jacente, d'où le sens "empirique" donné à l'histogramme. Les variables aléatoires simulées obéissent respectivement à une loi uniforme sur $[\alpha_1, \alpha_2]$, à une loi de Rayleigh et à une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Les paramètres de la simulation sont les suivants: $V=1.0$ p.u.; $R_d=1.0$ p.u.; la moyenne de τ est égale à 5%. Le programme donne non seulement l'histogramme de l'amplitude de l'harmonique étudié, mais aussi celui de sa phase. Afin de vérifier les résultats analytiques, le programme inclut le calcul numérique des équations analytiques, il tient compte de la procédure décrite au paragraphe 4.4.4.

4.6.1. Comparaison des résultats concernant les amplitudes

Les densités de probabilité des amplitudes des harmoniques 3, 5 et 7 calculées par les formules analytiques (4.20), (4.27) et (4.28) et les histogrammes "empiriques" correspondants obtenus par simulation de Monte Carlo, apparaissent sur les figures 4.1, 4.2, et 4.3. On peut mentionner plusieurs propriétés intéressantes:

- Lorsque la commande est individuelle, les harmoniques 5 et 7 sont gaussiens tandis que l'harmonique 3 suit une loi demi-normale. C'est une différence de nature remarquable entre les harmoniques caractéristiques et non caractéristiques.
- L'effet du déséquilibre aléatoire des tensions est clair. Il tend à adoucir les discontinuités des densités de probabilité. En effet, le déséquilibre des tensions peut être considéré comme un phénomène introduisant du bruit dans le spectre harmonique du convertisseur. Ceci a pour effet, d'une part, de moduler le spectre caractéristique et, d'autre part, de faire apparaître le spectre non caractéristique.

Chapitre 4

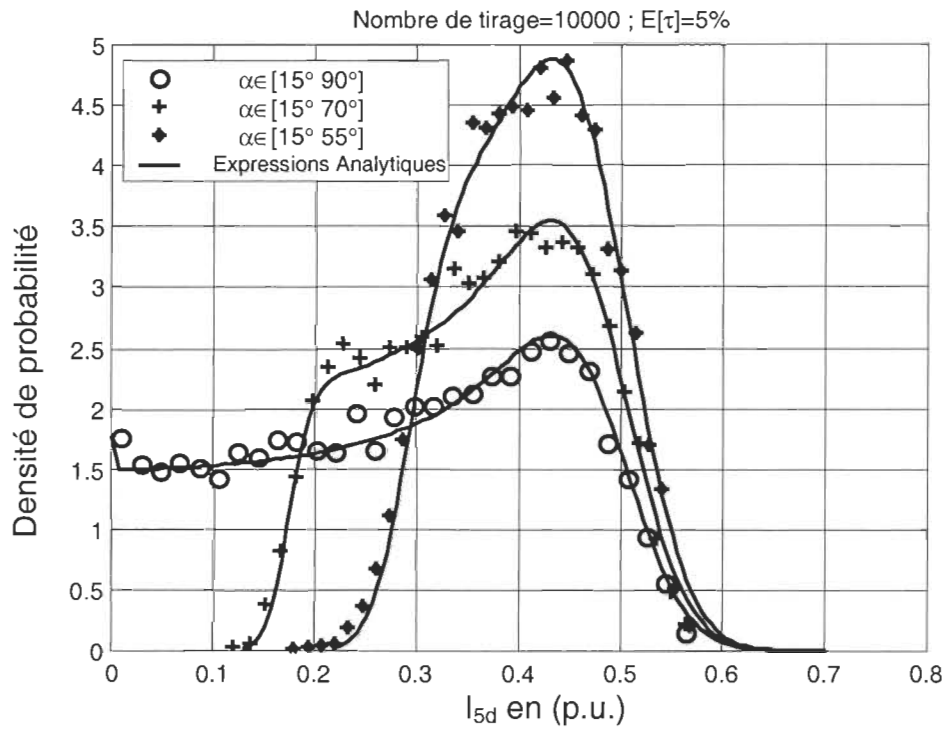


Figure 4.2: Densité de probabilité de I_{d5} pour différents intervalles de variations de α , la valeur moyenne de τ étant de 5%

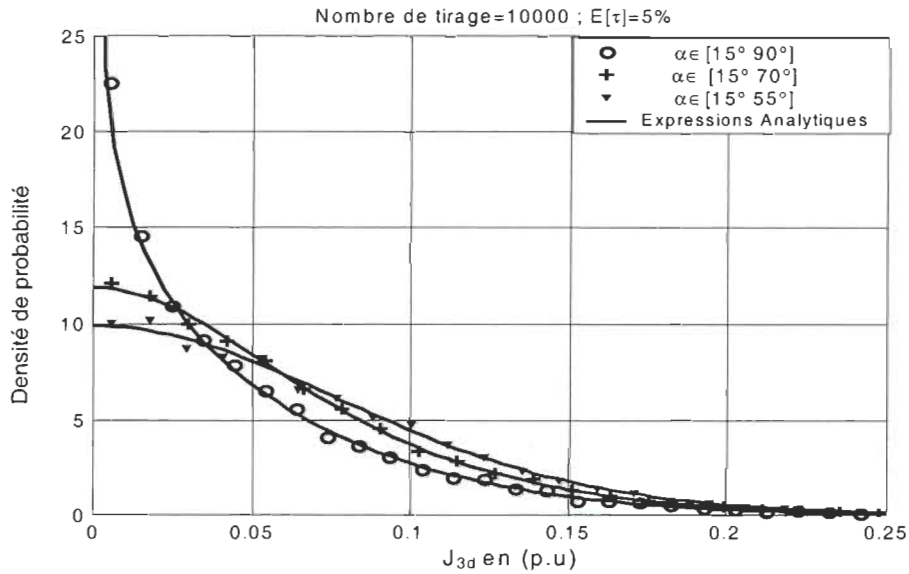


Figure 4.3: Densité de probabilité de J_{d3} pour différents intervalles de variations de α , la valeur moyenne de τ étant de 5%

Chapitre 4

En utilisant une commande équadistante, les harmoniques non caractéristiques disparaissent, la variation de la charge reste le seul paramètre qui agit sur le spectre harmonique, afin d'éviter que la probabilité des amplitudes des courants harmoniques soit maximale, il faut s'assurer que les bornes de variation de l'angle d'amorçage α soient différentes de zéro.

4.6.2. Comparaison des résultats concernant les phases

Les densités de probabilité des phases des harmoniques sous une commande individuelle correspondant à α variant entre 15° et 90° à la condition $E[\tau]=5\%$, sont présentées sur les figures 4.7 et 4.8, ceux correspondant à la commande équadistante pour les différents cas étudiés au paragraphe 4 sont présentés sur les figures 4.4, 4.5 et 4.6. Ces densités ont été calculées en appliquant la procédure décrite par (4.63) et (4.64) permettant de les définir sur $[0, 2\pi]$.

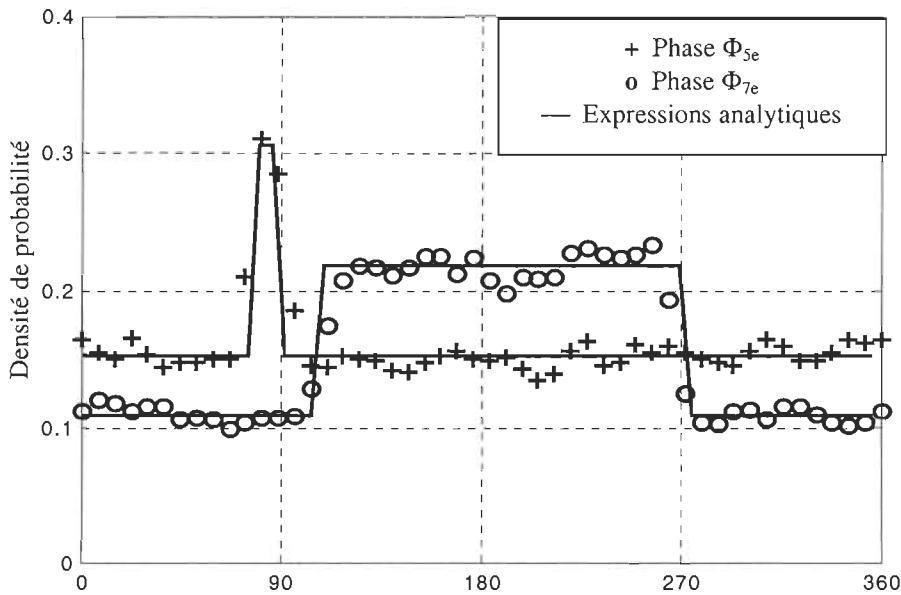


Figure 4.4: Densités de probabilité de phase pour α variant entre 15° et 90° $E[\tau]=0\%$.

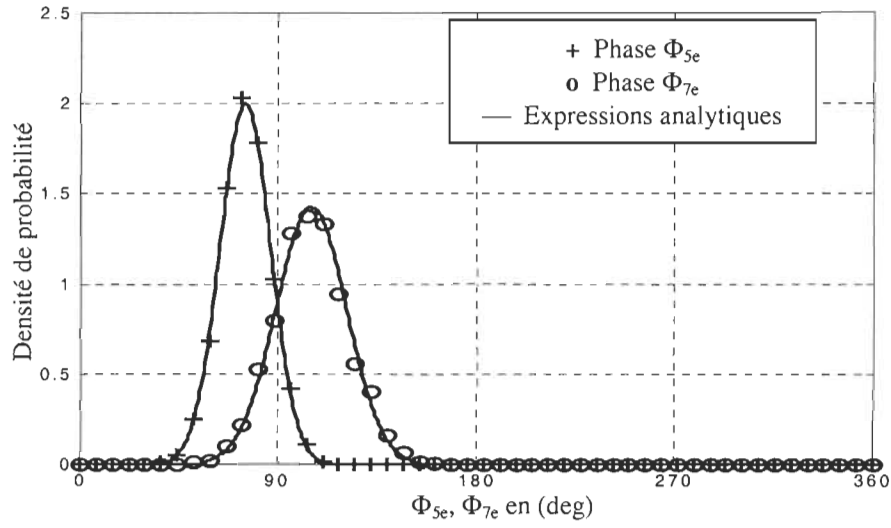


Figure 4.5: Densités de probabilité de phase pour $\alpha = 15^\circ$, $E[\tau] = 5\%$.

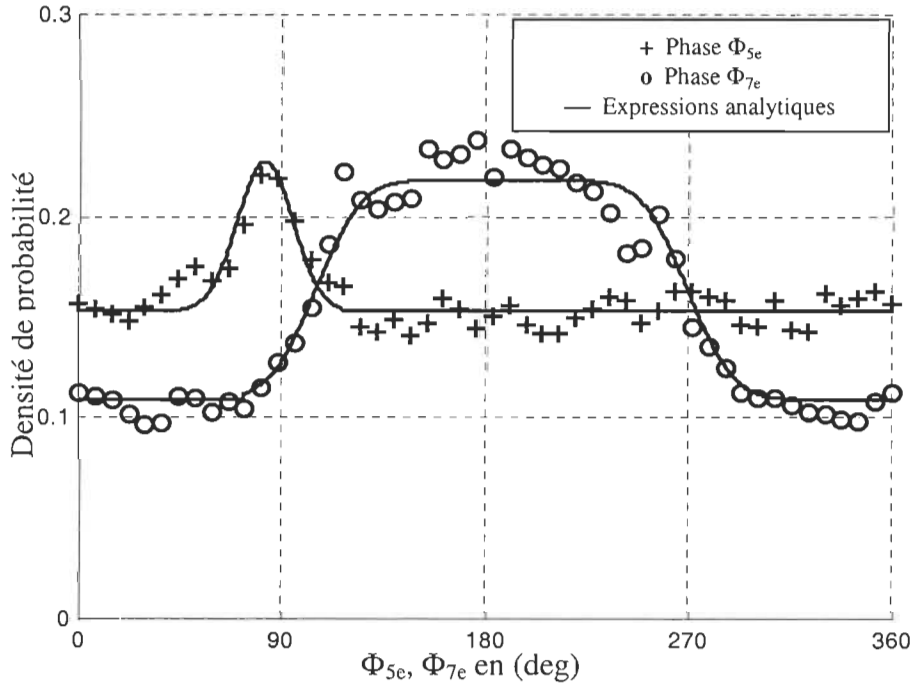


Figure 4.6: Densités de probabilité de phase pour $\alpha \in [15^\circ, 90^\circ]$, $E[\tau] = 5\%$.

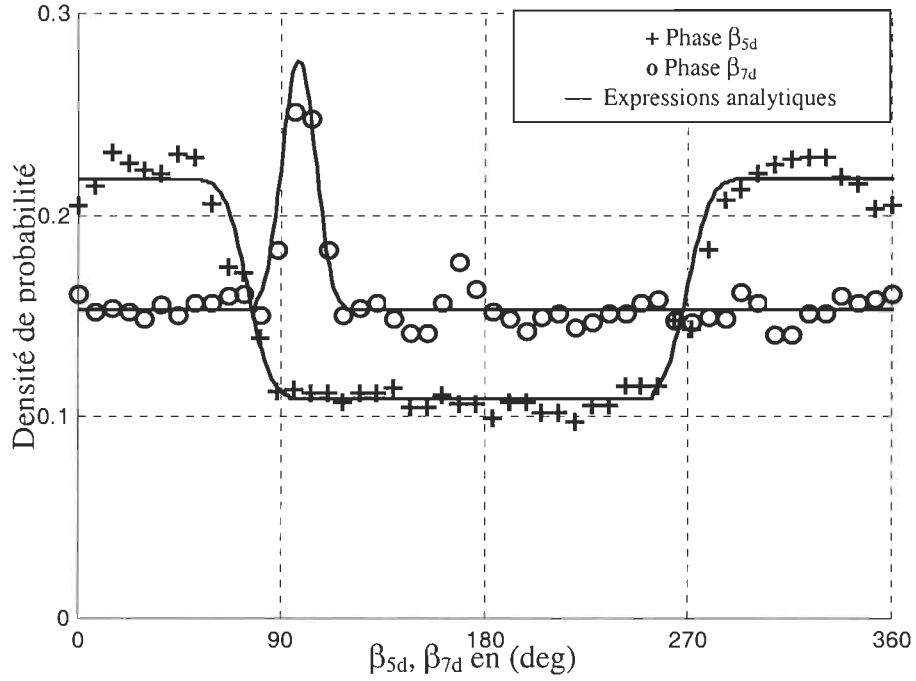


Figure 4.7 Densités de probabilité de phase pour α variant entre 15° et 90° , $E[\tau]=5\%$; +, o : Simulation de Monte Carlo, — : Expressions analytiques

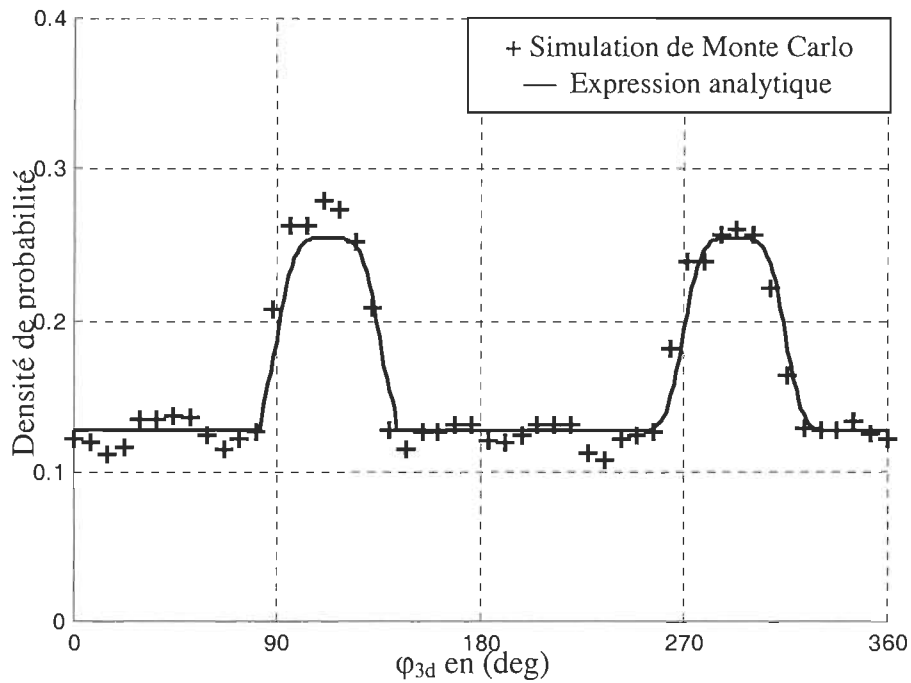


Figure 4.8: Densités de probabilité de phase pour α variant entre 15° et 90° , $E[\tau]=5\%$

Chapitre 4

Les courbes représentées aux figures 4.2, 4.3 et 4.7 sont similaires à celles présentées dans [WAN 93].

- Il convient de noter une différence remarquable entre les harmoniques caractéristiques et non caractéristiques: la densité de la phase de l'harmonique 3 est bi_modale, tandis que celles des harmoniques 5 et 7 sont uni_modales. Le caractère bi_modal des harmoniques non caractéristiques est liée à la discontinuité de φ_{hd} en fonction de θ ;
- La diversité de phase des harmoniques non caractéristiques est deux fois plus importante que celle des harmoniques caractéristiques de rang similaire (même ordre de grandeur). Cette propriété est importante lors du calcul de la combinaison des harmoniques probabilistes, puisque la diversité de phase est un des facteurs essentiels du problème ;
- La commande équidistante est plus avantageuse, du fait qu'elle élimine les harmoniques non caractéristiques qui ont un caractère bi-modale et laisse seulement les harmoniques caractéristiques qui ont un caractère uni-modale.
- Le déséquilibre des tensions a pour effet d'adoucir les courbes de densité des harmoniques caractéristiques. Les figures 4.4 et 4.6 correspondant à la même variabilité de α avec et sans déséquilibre de tensions ; on observe sur la figure 4.6 que le déséquilibre a pour effet d'adoucir les discontinuités.

4.7. Conclusion

Les caractéristiques probabilistes des harmoniques caractéristiques et non caractéristiques ont été mises en évidence puis comparées. Le déséquilibre des tensions a pour effet d'adoucir les densités de probabilité des amplitudes pour les deux types d'harmoniques. Si les propriétés des harmoniques caractéristiques sont principalement déterminées par l'angle d'amorçage α , celles des harmoniques non caractéristiques présentent une variabilité plus grande par suite de l'influence conjointe des trois variables indépendantes α , τ , et θ .

Chapitre 5 : Modélisation probabiliste des harmoniques produits par un redresseur à douze pulsations

5.1. Introduction

Il est connu que lorsque plusieurs sources de courants harmoniques fonctionnent simultanément au sein d'une installation électrique, une caractérisation probabiliste précise des vecteurs harmoniques résultants au point de raccordement au réseau électrique requiert une bonne connaissance des caractéristiques probabilistes des sources individuelles d'harmoniques, en particulier des redresseurs. Les courants harmoniques générés par un redresseur sont sujets aux variations aléatoires dues d'une part aux fluctuations de la charge à courant continu et d'autre part aux perturbations de la source d'alimentation. Bien que le redresseur hexaphasé ait déjà fait l'objet de quelques publications récentes concernant la modélisation probabiliste des harmoniques, aucune attention n'a été accordée au redresseur dodécaphasé. Ce chapitre présente le comportement aléatoire des harmoniques produits par un redresseur dodécaphasé en se basant sur son modèle déterministe et les modèles probabilistes du déséquilibre de tensions et de la charge à courant continu. Les densités de probabilité des amplitudes et des phases des courants harmoniques sont établies puis comparées aux résultats obtenus par simulations de Monté Carlo. Les modèles probabilistes des harmoniques développés permettent d'analyser les influences des variations du déséquilibre de tension et de la charge à courant continu sur les caractéristiques aléatoires du spectre d'harmoniques générés par le redresseur à douze pulsations.

5.2. Modélisation des harmoniques du convertisseur à douze pulsations

Le chapitre 3 fournit les expressions de base et les expressions simplifiées des amplitudes et des phases des harmoniques produits par un convertisseur dodécaphasé muni d'une commande équidistante. Ces expressions sont utilisées dans ce chapitre pour l'analyse probabiliste. Les expressions simplifiées sont utilisées pour la modélisation probabiliste alors que les expressions de base sont utilisées dans la simulation de Monte Carlo. On rappelle que les courants harmoniques caractéristiques dans la phase A sont approximativement déterminés dans le chapitre 3 par:

$$I_{Ah} = \frac{12I_d}{h\pi}; \quad h = 12k \pm 1 \quad (5.1)$$

$$\psi_{Ah} = -h(\alpha - \frac{\sqrt{3}\tau \cos \theta}{2} + \frac{\pi}{6}); \quad h = 12k \pm 1 \quad (5.2)$$

Et les courants harmoniques non caractéristiques :

$$J_{Ah} = \frac{6I_d}{\pi} \tau |\sin \theta|; \quad h = 12k - 6 \pm 1 \quad (5.3)$$

$$\varphi_{Ah} = \left\{ -h(\alpha - \frac{\sqrt{3}\tau \cos \theta}{2} + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{2} - \pi \left[1 - U(\sin(-\frac{h}{2}\tau \sin \theta)) \right] \right\}; \quad h = 12k - 6 \pm 1 \quad (5.4)$$

Rappelons aussi que :

α représente l'angle d'allumage, τ le taux de déséquilibre, θ l'angle du déséquilibre, et U la fonction d'heaviside ;

I_{Ah} et Ψ_{Ah} sont respectivement l'amplitude et la phase des harmoniques caractéristiques ($h=12k\pm1$) ;

Chapitre 5

J_{Ah} et φ_{Ah} sont respectivement les amplitudes et les phases des harmonique non-caractéristiques du convertisseur dodécaphasé ($h=12k-6\pm1$).

5.3. Analyse probabiliste

5.3.1. Densité de probabilité des amplitudes.

Puisque I_{Ah} ne dépend que de α dans l'équation (5.1), sa densité de probabilité est donnée par :

$$f_{I_{Ah}}(I_{Ah}) = \frac{1}{\Delta\alpha\sqrt{(C_I/h)^2 - I_{Ah}^2}}; \quad \frac{C_I \cos\alpha_2}{h} < I_{Ah} < \frac{C_I \cos\alpha_1}{h}; \quad h = 12k \pm 1 \quad (5.5)$$

avec $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ et la constantes $C_I = 72\sqrt{6}E/\pi^2 R_d$.

Lorsque la charge à courant continu et le déséquilibre de tension sont aléatoires, la densité de probabilité de J_{Ah} peut être établie en considérant le produit de deux variables aléatoires indépendantes : $J_{Ah}=x.y$ où $x=2C_J\cos\alpha$ et $y=\tau|\sin\theta|$, sachant que la constante $C_J = 18\sqrt{6}E/\pi^2 R_d$. La densité de probabilité $f_x(x)$ s'écrit :

$$f_x(x) = \frac{1}{\Delta\alpha\sqrt{(2C_J)^2 - x^2}} \quad 2C_J \cos\alpha_2 < x < 2C_J \cos\alpha_1 \quad (5.6)$$

$\tau\sin\theta$ étant une variable aléatoire gaussienne [PAP 91], $\tau|\sin\theta|$ a une distribution semi-normale et la densité de probabilité de la variable y est donnée par:

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2\right]; \quad y > 0; \quad h = 12k - 6 \pm 1 \quad (5.7)$$

Chapitre 5

L'indépendance entre x et y permet d'écrire leur densité de probabilité jointe comme suit :

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\exp[-\frac{1}{2}(\frac{y}{\sigma})^2]}{\sigma \Delta \alpha \sqrt{2\pi(4C_J^2 - x^2)}}; 2C_J \cos \alpha_2 < x < 2C_J \cos \alpha_1, h = 12k - 6 \pm 1 \quad (5.8)$$

D'après l'analyse présentée au paragraphe 4.3.3 du chapitre 4, on peut établir que :

$$f_{J_{Ah}}(J_{Ah}) = \int_{2C_J \cos \alpha_2}^{2C_J \cos \alpha_1} \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma \Delta \alpha \sqrt{4C_J^2 - x^2}} \exp(-\frac{J_{Ah}^2}{2\sigma^2 x^2}) dx \quad (5.9)$$

5.3.2. Densité de probabilité des phases

Pour chercher la densité de probabilité de Ψ_{Ah} , l'équation (5.2) peut être écrite comme la somme de deux variables aléatoires.

$$\psi_{Ah} = Z + W = -h(\alpha - \frac{\sqrt{3}\tau \cos \theta}{2} + \frac{\pi}{6}) \quad h = 12k \pm 1 \quad (5.10)$$

$$Z = -h\alpha \quad (5.11)$$

$$W = \frac{h\sqrt{3}\tau \cos \theta}{2} - \frac{h\pi}{6} \quad (5.12)$$

$$f_z(z) = 1/(h\Delta\alpha) \quad -h\alpha_2 < z < -h\alpha_1 \quad (5.13)$$

$$f_w(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \exp[-\frac{1}{2}(\frac{y - m_w}{\sigma_w})^2] \quad (5.14)$$

avec, $m_w = -h\pi/6$ et $\sigma_w = h\sqrt{3}\sigma/2$.

Chapitre 5

La densité de probabilité de ψ_{Ah} peut être trouvée en ayant recours à la transformée inverse de Laplace du produit . Ainsi,

$$f_{\psi_{Ah}}(\psi_{Ah}) = L^{-1}\{L[f_z(z)].L[f_w(w)]\} = \frac{1}{2h\Delta\alpha} [\text{erf}(\frac{\psi_{Ah} + \lambda_2}{\sqrt{2}\sigma_w}) - \text{erf}(\frac{\psi_{Ah} + \lambda_1}{\sqrt{2}\sigma_w})] \quad (5.15)$$

$\lambda_1 = h\alpha_1 - m_w$, $\lambda_2 = h\alpha_2 - m_w$ et erf désigne la fonction d'erreur.

La densité de probabilité de φ_{Ah} peut être obtenue en considérant la formule suivante :

$$\varphi_{Ah} = X + T + Q \quad (5.16)$$

avec :

$$X = -h\alpha \quad (5.17)$$

$$T = \frac{h\sqrt{3}\tau \cos \theta}{2} - \frac{h\pi}{6} \quad (5.18)$$

$$Q = -\frac{\pi}{2} - \pi \left[1 - U(\sin(-\frac{h}{2}\tau \sin \theta)) \right] \quad (5.19)$$

La variable aléatoire Q prend la valeur $-\pi/2$ et $-3\pi/2$ avec la même probabilité 1/2. Si Q est vue comme une variable aléatoire continue, sa densité de probabilité peut être exprimée par :

$$f_q(q) = [\delta(q + \pi/2) + \delta(q + 3\pi/2)]/2 \quad (5.20)$$

où δ est la fonction impulsion unitaire.

Chapitre 5

Une technique similaire utilisant la transformée de Laplace peut être appliquée pour trouver la densité de probabilité de φ_{Ah} . On définit la variable aléatoire $P=X+T$. En se servant une fois de plus de la transformée inverse de Laplace, la densité de probabilité de P peut s'écrire sous la forme :

$$f_p(P) = L^{-1}\{L[f_x(X)].L[f_T(T)]\} = \frac{1}{2h\Delta\alpha} [erf(\frac{P+\lambda_2}{\sqrt{2}\sigma_w}) - erf(\frac{P+\lambda_1}{\sqrt{2}\sigma_w})] \quad (5.21)$$

De la même manière on trouvera facilement la densité de probabilité de $\varphi_{Ah}=P+Q$:

$$f_{\varphi_{Ah}}(\varphi_{Ah}) = \frac{1}{4h\Delta\alpha} [erf(\frac{\varphi_{Ah}+\lambda_2}{\sqrt{2}\sigma_w}) - erf(\frac{\varphi_{Ah}+\lambda_1}{\sqrt{2}\sigma_w}) + erf(\frac{\varphi_{Ah}+\lambda_4}{\sqrt{2}\sigma_w}) - erf(\frac{\varphi_{Ah}+\lambda_3}{\sqrt{2}\sigma_w})] \quad (5.22)$$

$$\text{avec } \lambda_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{h\pi}{6} + h\alpha_2; \lambda_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{h\pi}{6} + h\alpha_1; \lambda_4 = \frac{3\pi}{2} + \frac{h\pi}{6} + h\alpha_2; \lambda_3 = \frac{3\pi}{2} + \frac{h\pi}{6} + h\alpha_1$$

5.4. Résultats de simulation

En vue de simuler le comportement probabiliste des harmoniques produits par le convertisseur dodécaphasé, un programme basé sur la méthode de Monte Carlo a été écrit. Le modèle de base du convertisseur développé dans le chapitre 3 est utilisé parce que ce modèle est plus précis et que sa programmation ne présente pas de complications particulières. Le programme fait 10^4 tirages pour toutes les variables aléatoires simulées α , τ et θ avant de calculer les histogrammes "empiriques" des fonctions résultantes (I_{Ah} , J_{Ah} , Ψ_{Ah} , φ_{Ah}). Les variables aléatoires simulées (α , τ , et θ) obéissent respectivement à une loi uniforme sur $[\alpha_1, \alpha_2]$, à une loi de Rayleigh et à une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Les paramètres de la simulation sont les suivants: $V=1.0$ p.u.; $R_d=1.0$ p.u.; la moyenne de τ est égale à 3% ou 5%.

Chapitre 5

Le programme donne non seulement l'histogramme de l'amplitude de l'harmonique étudié, mais aussi celui de sa phase. Le programme inclut le calcul numérique des équations (5.5), (5.9), (5.15) et (5.22) afin de vérifier l'analyse.

Il faut noter que jusqu'à présent les densités de probabilité des phases ont été exprimées à partir d'une extension du modèle déterministe, c'est-à-dire en ne fixant aucune contrainte relative aux intervalles de variations angulaires. De ce fait, les phases φ_{Ah} et Ψ_{Ah} peuvent être distribuées sur des intervalles supérieurs à 2π , surtout pour les harmoniques d'ordre élevé. Cependant, sur un plan physique la phase d'un vecteur doit être bornée dans un intervalle tel que $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, +\pi]$. Le programme tient compte de cette contrainte, en définissant une densité équivalente sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ donnée par l'équation (4.63).

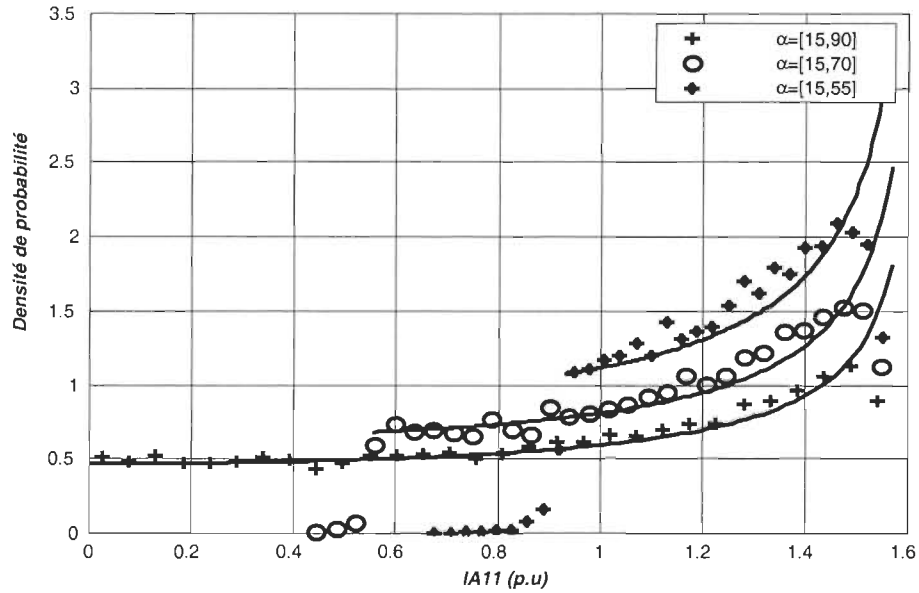


Figure 5.1: Densité de probabilité de I_{A11} pour différents intervalles de α , $E[\tau]=5\%$, Points : simulation de Monte Carlo, Courbes : expressions analytiques

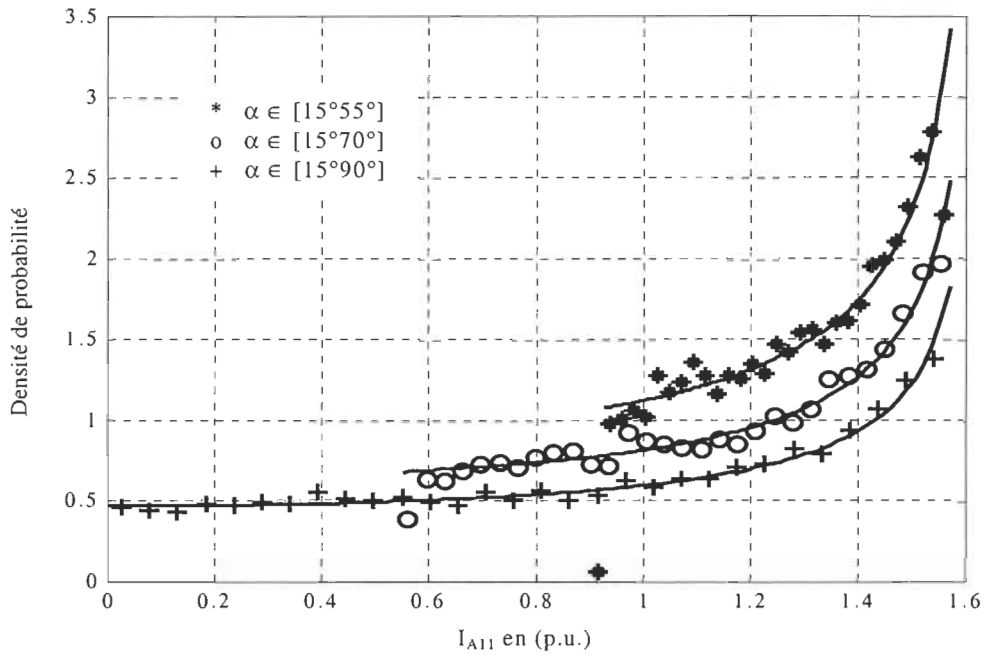


Figure 5.2: Densité de probabilité de I_{A11} pour différents intervalles de α , $E[\tau]=3\%$, Points : simulation de Monte Carlo, Courbes : expressions analytiques

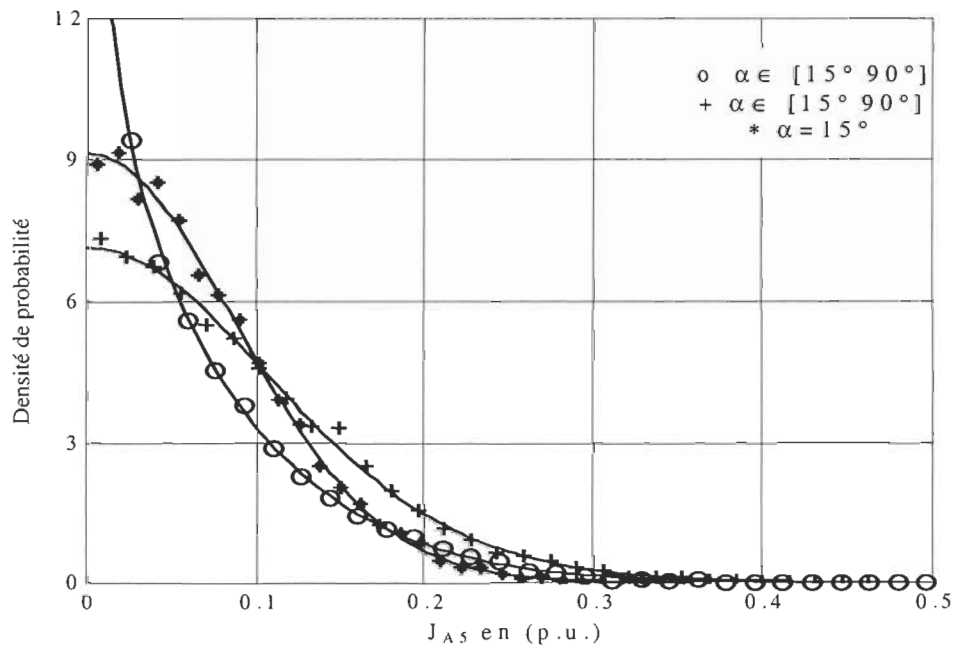


Figure 5.3: Densité de probabilité de J_{A5} pour différents intervalles de α , $E[\tau]=3\%$, Points : simulation de Monte Carlo, Courbes : expressions analytiques

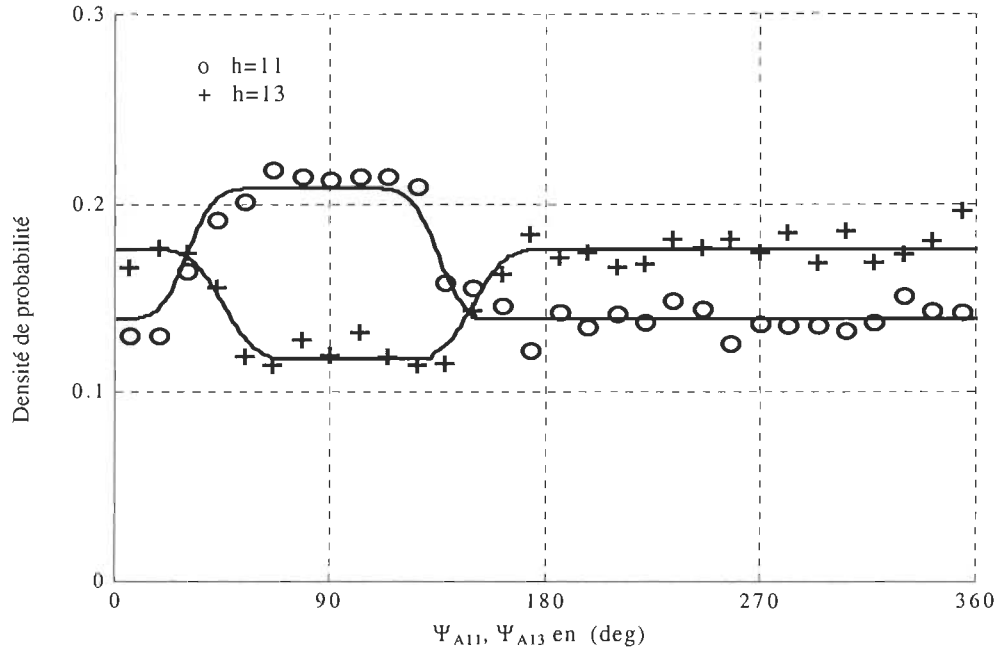


Figure 5.4: Densité de probabilité de Ψ_{A11} et Ψ_{A13} pour $\alpha=[15^\circ 90^\circ]$, $E[\tau]=3\%$,
Points : simulation de Monte Carlo, Courbes : expression analytique

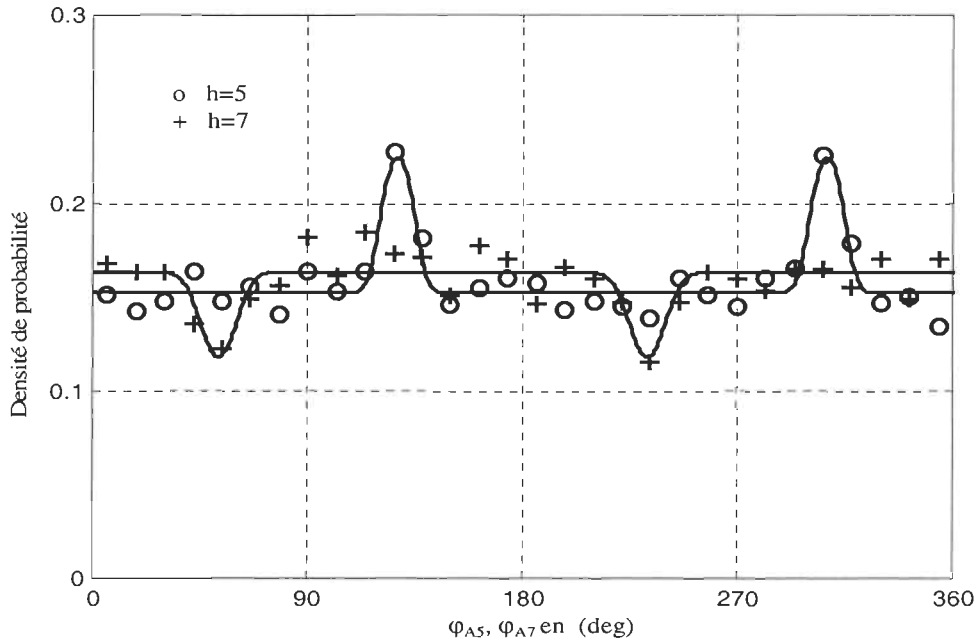


Figure 5.5: Densités de probabilité de ϕ_{A5} et ϕ_{A7} pour $\alpha=[15^\circ 90^\circ]$, $E[\tau]=3\%$,
Points : simulation de Monte Carlo, Courbe : expression analytique

5.5. Discussion

Les densités de probabilité des amplitudes des harmoniques 5, 7, 11, 13 calculées par les formules analytiques (5.5) et (5.9), et les histogrammes "empiriques" correspondants obtenus par simulation de Monte Carlo apparaissent sur les figures 5.1, 5.2 et 5.3. On peut mentionner plusieurs propriétés intéressantes:

- Les résultats de simulation de Monte Carlo basés sur le modèle précis concordent avec ceux du modèle simplifié dans le cas où le déséquilibre est de l'ordre de 3%, ce qui confirme que le déséquilibre n'a pas d'influence sur les harmoniques caractéristiques lorsque le déséquilibre est faible tel qu'illustré par la figure 5.1. La figure 5.2 montre que le modèle simplifié n'est plus valable lorsque le déséquilibre est de l'ordre de 5% ; la cause essentielle de cette différence est l'approximation du premier ordre du cosinus faite pour aboutir à l'équation 5.1 ; en fait une approximation de second ordre fait apparaître le déséquilibre dans l'équation 5.1.
- Les densités de probabilité des phases des harmoniques correspondant à α variant entre 15° et 90° à la condition $E[\tau]=3\%$, sont présentées sur les figures 5.4 et 5.5. Ces densités ont été calculées en appliquant l'équation (4.63) permettant de les définir sur $[0, 2\pi]$.
- Il convient de noter une différence remarquable entre les harmoniques caractéristiques et non caractéristiques: les densités de la phase de l'harmonique 5 et 7 sont bi-modales, tandis que celles des harmoniques 11 et 13 sont uni-modales. Le caractère bi-modal des harmoniques non caractéristiques est liée à la discontinuité de φ_{Ah} en fonction de θ . Il est opportun de souligner que le caractère bi-modal des harmoniques de rang 5 et 7

Chapitre 5

est similaire à celui des harmoniques de rangs multiples de trois produit par le redresseur triphasé (Chapitre 4).

- Une concordance entre les expressions exactes données par les équations (3.5) et (3.8) et les expressions simplifiées données par les équations (5.2) et (5.4), telle qu'illustrée par les figures 5.4 et 5.5.
- L'effet du déséquilibre est illustré par les figures 5.4 et 5.5 ; il a pour effet d'adoucir les discontinuités pour l'ensemble des harmoniques et doubler la diversité des phases pour les harmoniques de rang $12k-6 \pm 1$.

5.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence les caractéristiques probabilistes des harmoniques caractéristiques et non caractéristiques générés par un convertisseur dodécaphasé sous tensions déséquilibrées. Une bonne concordance entre la simulation de Monte Carlo et le modèle analytique nous permet de faire confiance à ce dernier dans des applications pratiques.

Finalement, il faut noter que l'analyse probabiliste présentée dans ce chapitre peut être appliquée à d'autres sources d'harmoniques qui ont des modèles déterministes déjà établis. Les densités de probabilité de α , τ , et θ considérées dans ce chapitre peuvent être changées pour représenter des cas spécifiques, mais la procédure de modélisation reste similaire.

Chapitre 6: Sommation des harmoniques probabilistes

6.1. Introduction

Dans un système de puissance, il y a différents appareils produisant des harmoniques. Ils peuvent inclure les redresseurs, les fours à arc et les transformateurs. Les courants harmoniques de ligne et les distorsions de la tension de ligne dépendent de l'effet collectif des sources d'harmonique. Si les courants et les tensions de ligne causés par chaque source ont la même phase, alors le total des courants harmoniques de ligne et les distorsions de la tension de ligne vont tout simplement être la somme algébrique des contributions de chaque source. Cependant, en pratique les composants non linéaires produisent des harmoniques qui ont des phases différentes en plus à cause de la nature probabiliste des états des systèmes de puissance et des points de fonctionnement des composants non linéaires, les harmoniques sont stochastiques, ce qui veut dire que leurs amplitudes et leurs phases varient d'une manière inconnu a priori .

La détermination des niveaux d'harmonique, due à différentes sources nécessite la sommation des vecteurs aléatoires des courants et des tensions. Le problème de la sommation des vecteurs aléatoires a été traité par deux chercheurs W.G.Sherman [SHE 72] et N.B. Rowe [ROW 74] qui ont décrit une technique qui peut être utilisée pour additionner un grand nombre de vecteurs aléatoires de même taille. Les vecteurs harmoniques qui peuvent être additionnés par la méthode de [SHE 72] doivent satisfaire les conditions suivantes : une phase distribuée uniformément de $[0 \ 2\pi]$; les composantes des phaseurs sont statistiquement indépendantes ; les amplitudes sont fixes.

Chapitre 6

Le travail de Sherman a été étendu par Rowe pour couvrir la sommation de vecteurs aléatoires dont l'amplitude peut varier uniformément entre 0 et un maximum. Cependant les deux premières conditions doivent être satisfaites. En plus, les variables aléatoires de l'amplitude et de la phase doivent être statistiquement indépendantes, i.e. leur fonctions de distribution de probabilité sont indépendantes les unes des autres.

Même si les restrictions ci-dessus facilitent la formulation mathématique de la somme des vecteurs aléatoires, l'expérience révèle que les phases et les amplitudes des harmoniques ne sont pas toujours uniformément distribuées [LAV 85]. [JIN 86] a traité la détermination de l'amplitude de la somme de vecteurs harmoniques aléatoires qui sont distribués dans un réseau de puissance. Cependant, les vecteurs probabilistes qui peuvent être traités par cette méthode doivent satisfaire les restrictions stipulées dans [ROW 74]. Une autre limitation de la méthode de [JIN 86] est que le réseau de puissance doit être déterministe. Cependant, à cause de la nature probabiliste des états des systèmes de puissance, les réseaux de puissance sont stochastiques. Des techniques doivent être développées pour additionner les vecteurs harmoniques aléatoires indépendamment du type des caractéristiques probabilistes de l'amplitude et de la phase.

La sommation des harmoniques est en fait une opération vectorielle. La décomposition de vecteurs en composantes orthogonales permet de transformer l'opération vectorielle en opération arithmétique sur les axes correspondants. Ainsi, la somme des composantes sur le même axe est elle-même arithmétique. Dans le cas des harmoniques probabilistes, les composantes orthogonales sont des variables aléatoires. Le théorème central limite suggère que lorsque le nombre (N) de variables aléatoires indépendantes est assez grand, leur somme converge vers une loi de Gauss. Ce principe a été appliqué dans toutes les études analytiques

Chapitre 6

relatives à ce sujet dont le degré de complexité s'accroît au fur et à mesure que les connaissances sur l'aspect aléatoire des harmoniques s'accumulent.

L'application du modèle de distribution normale bi-dimensionnelle (le modèle BND) au problème de sommation des vecteurs aléatoires permet d'obtenir des résultats moins restrictifs au prix d'une résolution numérique. L'utilisation de ce modèle, classique dans la théorie des probabilités, remonte aux travaux de [BAG 87] qui ont mentionné la possibilité d'utiliser une loi normale bi-dimensionnelle pour traiter le problème.

Dans ce chapitre, nous étendrons l'étude du convertisseur hexaphasé faite par [WAN 93] à celle d'un convertisseur hexaphasé. Nous déterminerons les paramètres du modèle BND relatifs au convertisseur hexaphasé. La comparaison entre les résultats du modèle BND et ceux obtenus par simulation de Monte Carlo sera présentée pour valider notre analyse.

6.2. Composantes réelles et imaginaires du modèle probabiliste

Pour la sommation des harmoniques, la décomposition sous forme rectangulaire s'avère plus facile à manipuler que la décomposition sous forme polaire. Ainsi, la somme vectorielle des harmoniques peut se décomposer en deux sommes orthogonales obtenues par sommation arithmétique des composantes relatives à chacun des axes. La formulation du problème en termes de composantes orthogonales est donc l'objectif de ce paragraphe.

Le schéma équivalent du convertisseur montré à la figure 3.1 reste utilisable pour ce type d'analyse. Dans un cadre probabiliste, les hypothèses simplificatrices suivantes peuvent être admises sans causer d'erreurs significatives sur les résultats: tensions d'alimentation équilibrées, commutations instantanées ($X_a=X_b=X_c=0$), ondulation du courant continu négligeable (X_d très grande). En outre, on considère

Chapitre 6

que la charge continue est purement résistive. Ainsi, les composantes réelle X_h et imaginaire Y_h de l'harmonique de courant de rang h s'expriment par:

$$X_h = \pm \frac{12I_d}{h\pi} \cosh\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \pm \frac{Cte}{h} \cos \alpha \cosh\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \quad (6.1)$$

$$Y_h = \pm \frac{12I_d}{h\pi} \sinh\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \pm \frac{Cte}{h} \cos \alpha \sinh\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \quad (6.2)$$

avec

$$I_d = \frac{V_d}{R_d} = \frac{6\sqrt{6}V \cos \alpha}{\pi R_d} \quad (6.3)$$

et

$$Cte = \frac{72\sqrt{6}V}{\pi^2 R_d} \quad (6.4)$$

Les composantes réelles et imaginaires des harmoniques relatifs aux phases B et C peuvent être obtenues de la même façon à un déphasage de $\pm 2\pi/3$ près. Comme le système considéré est supposé parfaitement équilibré, il suffit de formuler les composantes dans une seule phase (dans le texte qui suit, on ne considère que les harmoniques dans la phase A).

On constate, à partir des équations (6.1) et (6.2), que les composantes X et Y sont entièrement déterminées par la variable α , laquelle reflète fidèlement la variation du point de fonctionnement du convertisseur. Cette propriété permet d'étendre le modèle déterministe du convertisseur dodéphasé au modèle probabiliste en considérant α comme une variable aléatoire. De cette façon, X et Y deviennent des fonctions de α et sont aussi des variables aléatoires.

Chapitre 6

Théoriquement, la distribution de α dépend de celle de la charge continue qui fluctue aléatoirement.

6.3. Sommation des courants harmoniques

Dans la phase A, les composantes réelles et imaginaires sont formulées en fonction de α . Chaque composante X_h et Y_h est une variable aléatoire. Pour N convertisseurs dodécaphasés la somme des composantes X sera $X_t = \sum_{i=1}^N X_i$ et la somme des composantes Y sera $Y_t = \sum_{i=1}^N Y_i$.

Il est montré en vertu du théorème central limite [PAP 91] que les sommes des composantes X et Y ont des distributions normales $f_{xt}(X_t)$ et $f_{yt}(Y_t)$.

$$f_{xt}(x_t) = \frac{e^{-\frac{(x_t - \mu_{xt})^2}{2\sigma_{xt}}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{xt}} \quad (6.5)$$

$$f_{yt}(y_t) = \frac{e^{-\frac{(y_t - \mu_{yt})^2}{2\sigma_{yt}}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{yt}} \quad (6.6)$$

Les variables aléatoires X_t et Y_t sont conjointement distribuées avec une densité de probabilité conjointe $f_{xy}(x_t, y_t)$ normale qui peut s'écrire sous la forme :

$$f_{xy}(x_t, y_t) = \frac{1}{2\pi\sigma_{xt}\sigma_{yt}\sqrt{1-\rho_t^2}} \exp(Q) \quad (6.7)$$

Avec :

$$Q = \frac{-1}{2(1-\rho_t^2)} \left[\frac{(x_t - \mu_{xt})^2}{\sigma_{xt}^2} - \frac{2\rho_t(x_t - \mu_{xt})(y_t - \mu_{yt})}{\sigma_{xt}\sigma_{yt}} + \frac{(y_t - \mu_{yt})^2}{\sigma_{yt}^2} \right]$$

Chapitre 6

les paramètres : μ_{xt} et μ_{yt} , sont respectivement les moyennes de X_t et Y_t , σ_{xt} et σ_{yt} leur écart type et ρ_t leur coefficient de corrélation.

6.3.1. Détermination des paramètre de la densité jointe

6.3.1.1. Calcul des moyennes

Les moyennes (μ_{xt}, μ_{yt}) de la densité $f_{xy}(x_t, y_t)$ peuvent être ainsi déterminées :

$$\mu_{xt} = \sum_{i=1}^N \mu_{xi} \quad (6.8)$$

$$\mu_{yt} = \sum_{i=1}^N \mu_{yi} \quad (6.9)$$

Pour calculer la moyenne relative à chaque convertisseur dodécaphasé on applique les relations suivantes :

$$\mu_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x f_{\alpha}(\alpha) d\alpha = \pm \frac{Cte}{h\Delta\alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \cosh \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) d\alpha \quad (6.10)$$

$$\mu_x = \pm \frac{Cte}{2h\Delta\alpha} \left\{ \frac{\sin[\alpha_2(1+h) + h\pi/6] - \sin[\alpha_1(1+h) + h\pi/6]}{1+h} + \frac{\sin[\alpha_2(1-h) - h\pi/6] - \sin[\alpha_1(1-h) - h\pi/6]}{1-h} \right\} \quad (6.11)$$

$$\mu_y = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} y f_{\alpha}(\alpha) d\alpha = \pm \frac{Cte}{h\Delta\alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \sinh \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) d\alpha \quad (6.12)$$

$$\mu_y = \pm \left(-\frac{Cte}{2h\Delta\alpha} \right) \left\{ \frac{\cos[\alpha_2(1+h) + \frac{h\pi}{6}] - \cos[\alpha_1(1+h) + \frac{h\pi}{6}]}{1+h} + \frac{\cos[\alpha_2(h-1) + \frac{h\pi}{6}] - \cos[\alpha_1(h-1) + \frac{h\pi}{6}]}{h-1} \right\} \quad (6.13)$$

6.3.1.2. Calcul des écarts types

Les écarts types $(\sigma_{xt}, \sigma_{yt})$ de la densité (6.7) peuvent être ainsi déterminés :

$$\sigma_{xt} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_{xi}^2 \right)} \quad (6.14)$$

$$\sigma_{yt} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_{yi}^2 \right)} \quad (6.15)$$

Pour calculer l'écart type relatif à chaque convertisseur dodécaphasé on applique les relations suivantes :

$$\sigma_x = \sqrt{E[X^2] - \mu_x^2} \quad (6.16)$$

$$\sigma_y = \sqrt{E[Y^2] - \mu_y^2} \quad (6.17)$$

Les moments d'ordre 2 $E[X^2]$ et $E[Y^2]$ peuvent être obtenus à partir de la densité de α sans avoir besoin de la densité de X et Y .

$$E[X^2] = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^2 f_\alpha(\alpha) d\alpha = \frac{Cte^2}{h^2 \Delta\alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2 \alpha \cos^2 h \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) d\alpha \quad (6.18)$$

Chapitre 6

$$\begin{aligned}
 E[X^2] = & \frac{Cte^2}{4h^2\Delta\alpha} \left[\Delta\alpha + \frac{\sin(2h\alpha_2 + h\pi/3) - \sin(2h\alpha_1 + h\pi/3)}{2h} \right. \\
 & + \frac{\sin((2h+2)\alpha_2 + h\pi/3) - \sin((2h+2)\alpha_1 + h\pi/3)}{4h+4} \\
 & \left. + \frac{\sin((2-2h)\alpha_2 - h\pi/3) - \sin((2-2h)\alpha_1 - h\pi/3)}{4-4h} + \frac{\sin(2\alpha_2) - \sin(2\alpha_1)}{2} \right]
 \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$E[Y^2] = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} y^2 f_{\alpha}(\alpha) d\alpha = \frac{Cte^2}{h^2\Delta\alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2 \alpha \sin^2 h \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) d\alpha \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned}
 E[Y^2] = & \frac{Cte^2}{4h^2\Delta\alpha} \left[\Delta\alpha - \frac{\sin(2h\alpha_2 + h\pi/3) - \sin(2h\alpha_1 + h\pi/3)}{2h} \right. \\
 & - \frac{\sin((2h+2)\alpha_2 + h\pi/3) - \sin((2h+2)\alpha_1 + h\pi/3)}{4h+4} \\
 & \left. - \frac{\sin((2-2h)\alpha_2 - h\pi/3) - \sin((2-2h)\alpha_1 - h\pi/3)}{4-4h} + \frac{\sin(2\alpha_2) - \sin(2\alpha_1)}{2} \right]
 \end{aligned} \quad (6.21)$$

6.3.1.3. Calcul du coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation ρ_i peut être exprimé par :

$$\rho_i = \frac{\text{cov}(X_i, Y_i)}{\sigma_{xi} \sigma_{yi}} = \frac{\sum_{i=1}^N \rho_i \sigma_{xi} \sigma_{yi}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_{xi}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N \sigma_{yi}^2 \right)}} \quad (6.22)$$

ρ_i est le coefficient de corrélation correspondant à chaque convertisseur qu'on peut trouver à l'aide de l'expression suivante :

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E(XY) - \mu_x \mu_y}{\sqrt{(E[X^2] - \mu_x^2)(E[Y^2] - \mu_y^2)}} \quad (6.23)$$

avec $\sigma_x = \sqrt{E[X^2] - \mu_x^2}$, $\sigma_y = \sqrt{E[Y^2] - \mu_y^2}$ et $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_x \mu_y$.

6.3.2. Densité de probabilité de la résultante

L'amplitude de la somme des composantes harmoniques de courant est donné par :

$$R = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2} \quad (6.24)$$

Pour obtenir la densité de l'amplitude R, il suffit de transformer (6.7) en coordonnées polaires par le changement de variables [PAP 91] : $x_t = r \cos \theta$ et $y_t = r \sin \theta$. Ainsi, la densité de R peut être exprimée sous la forme :

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} f_{xy}(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta \quad (6.25)$$

où f_{xy} est la densité bi-dimensionnelle en coordonnées rectangulaires figurant dans l'équation (6.7).

6.4. Résultats

La figure 6.1 montre un réseau contenant 10 convertisseurs dodécaphasés fonctionnant indépendamment. Comme notre but est d'étudier la sommation des harmoniques probabilistes produits par ces convertisseurs, on peut faire les hypothèses simplificatrices suivantes pour alléger le calcul sans compromettre la validité de l'étude: les convertisseurs sont identiques en puissance et en tension nominale; les résistances continues R_d sont toutes égales à 1.0 p.u.; les angles de commande suivent individuellement des lois uniformes dont les paramètres α_1 et α_2 sont affichés dans le Tableau 6.1. En outre, on suppose que les transformateurs

Chapitre 6

sont connectés en Δ - Δ ou en Y-Y de sorte que les courants harmoniques ne subissent pas de déphasage. Cette hypothèse a pour but de réduire l'effort de calcul.

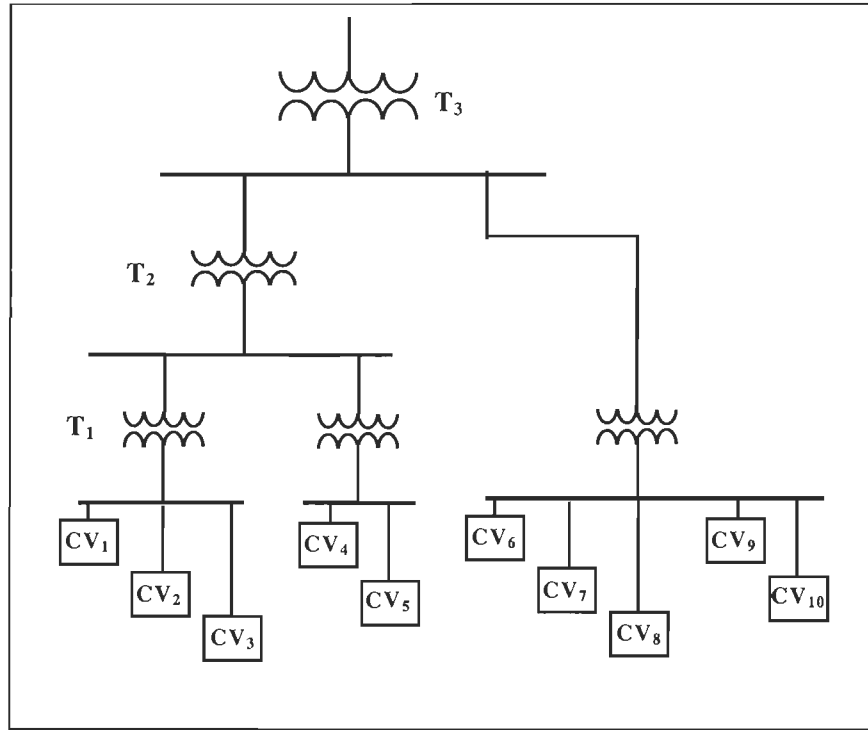


Figure 6.1 : Un réseau radial contenant 10 convertisseurs dodécaphasés

Convertisseurs	α_1 en deg	α_2 en deg	$\Delta\alpha$ en deg
1	5	25	20
2	20	45	25
3	5	25	20
4	10	30	20
5	5	45	40
6	10	30	20
7	5	65	60
8	15	75	60
9	10	30	20
10	5	25	20

Tableau 6.1: Intervalles de variation de l'angle de commande

Chapitre 6

6.4.1. Calcul des paramètres du modèle BND

Les moyennes, les écarts types et les coefficients de corrélation des composantes réelles et imaginaires des courants harmoniques d'ordre 11 produits par les 10 convertisseurs hexaphasés ont été calculés par les formules (6.8)-(6.23) et les résultats sont affichés dans le Tableau 6.2. Les moyennes et les écarts types sont en valeurs réduites (p.u.). Le transformateur T_1 est concerné par les harmoniques produits par les convertisseurs CV_1 , CV_2 et CV_3 ; T_2 par ceux de T_1 plus ceux produits par CV_4 et CV_5 ; tandis que la somme totale des courants harmoniques passe par T_3 . Le tableau 6.3 montre les paramètres du modèle BND correspondant aux harmoniques passant par les transformateurs T_1 , T_2 et T_3 .

	μ_x	μ_y	σ_x	σ_y	ρ
Convertisseur 1	0.5200	-0.5648	0.9650	0.9584	0.5312
Convertisseur 2	-0.2840	0.2764	0.8845	0.9592	0.3029
Convertisseur 3	0.5200	-0.5648	0.9650	0.9584	0.5312
Convertisseur 4	0.7422	0.0883	0.6601	1.1469	-0.1999
Convertisseur 5	-0.0610	-0.2191	0.9815	1.0418	0.0796
Convertisseur 6	0.7422	0.0883	0.6601	1.1469	-0.1999
Convertisseur 7	0.1029	-0.0864	0.8844	0.9447	0.0531
Convertisseur 8	0.0672	0.1163	0.8437	0.7679	-0.0102
Convertisseur 9	0.7422	0.0883	0.6601	1.1469	-0.1999
Convertisseur 10	0.5200	-0.5648	0.9650	0.9584	0.5312

Tableau 6.2: Paramètres des courants harmoniques de rang 11 générés par les convertisseurs

	μ_{xt}	μ_{yt}	σ_{xt}	σ_{yt}	ρ_t
Transformateur1	0.7560	-0.8533	1.6263	1.6604	0.4590
Transformateur2	1.4373	-0.9840	2.0109	2.2711	0.2561
Transformateur3	3.6118	-1.3422	2.7094	3.1920	0.1614

Tableau 6.3 : Paramètres du modèle BND correspondant aux harmoniques de rang 11 passant par les transformateurs

Chapitre 6

Le calcul des harmoniques de rang 13 peut se faire de la même manière que celle utilisée pour calculer les paramètres de l'harmonique de rang 11. Les résultats sont affichés dans les tableaux 6.4 et 6.5.

	μ_x	μ_y	σ_x	σ_y	ρ
Convertisseur 1	-0.3365	-0.2987	0.8714	0.8858	-0.3712
Convertisseur 2	0.0544	0.1297	0.8557	0.7612	-0.0467
Convertisseur 3	-0.3365	-0.2987	0.8714	0.8858	-0.3712
Convertisseur 4	0.1162	-0.4227	0.9742	0.7160	0.2321
Convertisseur 5	-0.2532	0.0237	0.8433	0.8532	-0.0327
Convertisseur 6	0.1162	-0.4227	0.9742	0.7160	0.2321
Convertisseur 7	-0.0763	0.0278	0.7750	0.7777	-0.0582
Convertisseur 8	0.0406	-0.0703	0.6616	0.7074	0.0124
Convertisseur 9	0.1162	-0.4227	0.9742	0.7160	0.2321
Convertisseur 10	-0.3365	-0.2987	0.8714	0.8858	-0.3712

Tableau 6.4 : Paramètres des courants harmoniques de rang 13 générés par les convertisseurs.

	μ_{xt}	μ_{yt}	σ_{xt}	σ_{yt}	ρ_t
Transformateur1	-0.6186	-0.4676	1.5003	1.4658	-0.2744
Transformateur2	-0.7556	-0.8666	1.9776	1.8410	-0.1278
Transformateur3	-0.8954	-2.0532	2.7580	2.5108	-0.0660

Tableau 6.5 : Paramètres du modèle BND correspondant aux harmoniques de rang 13 passant par les transformateurs

6.4.2. Comparaison entre les résultats analytiques et la simulation de Monte Carlo

Un programme en Matlab basé sur la technique de Monte Carlo a été écrit pour simuler le réseau électrique décrit par la figure 6.1. Le programme réalise 10^4 tirages aléatoires pour toutes les variables aléatoires simulées. Les courbes représentant les densités de probabilité calculées en utilisant le modèle BND et les données des tableaux 6.3 et 6.5 sont présentées respectivement dans les figures 6.2 et 6.3. Dans ces figures, les histogrammes obtenus par la simulation de Monte Carlo sont aussi présentés à titre de comparaison. On rappelle que les courants harmoniques passant par les convertisseurs T_1 , T_2 et T_3 correspondent respectivement aux sommes des harmoniques produits par 3, 5 et 10 convertisseurs.

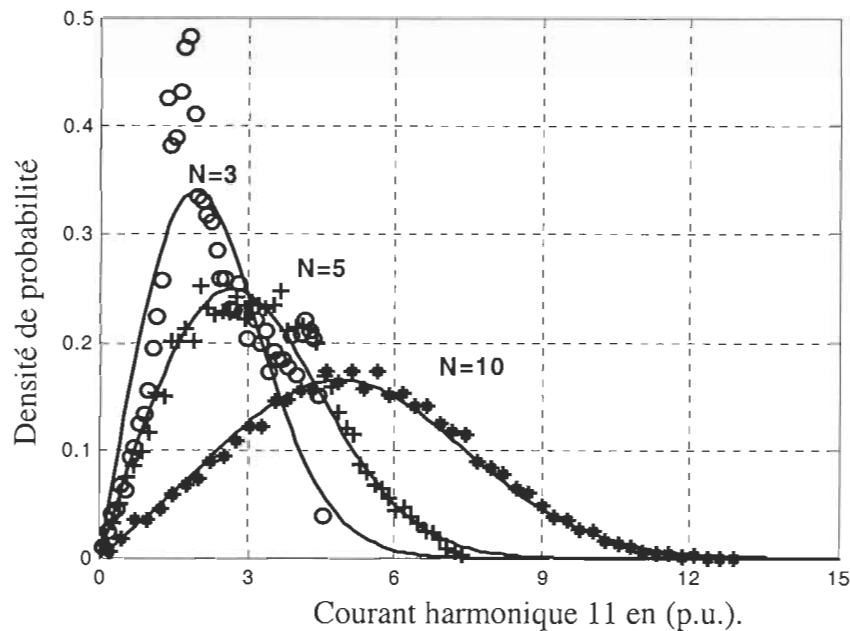


Figure 6.2: Densités de probabilité des sommes des harmoniques d'ordre 11 et histogrammes empiriques correspondants obtenus par la simulation de Monte Carlo

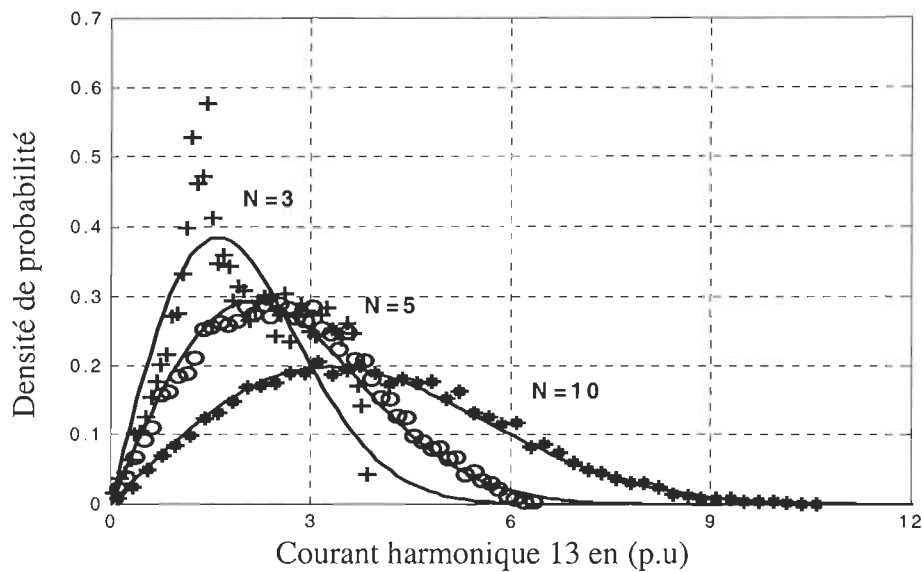


Figure 6.3: Densités de probabilité des sommes des harmoniques d'ordre 13 et histogrammes empiriques correspondants obtenus par la simulation de Monte Carlo

La comparaison des densités de probabilité avec les histogrammes montre clairement que la modèle BND et la simulation de Monte Carlo s'accordent très bien tant que le nombre N est supérieur à 5. On constate des grandes différences entre les résultats obtenus par les deux méthodes pour le cas $N=3$. L'explication est que le modèle BND basé sur le théorème central limite n'est valable que pour un grand N . Pour notre étude, $N \geq 5$ peut être considéré comme un critère d'applicabilité pratique du modèle BND. Toutefois, même pour le cas $N=3$, le modèle BND estime bien l'allure approximative de la somme. Nous avons comparé par ailleurs les moyennes et les écarts types calculés par les deux méthodes pour le cas $N=3$, et trouvé que le modèle BND donnait d'assez bons résultats. Les observations concordent avec celles faites dans [WAN 93] où des convertisseurs hexaphasés sont considérés.

Le modèle BND s'applique lorsque $N=5$ tel qu'il a été démontré dans [WAN 93].

Chapitre 6

Toutefois, lorsque nous avons trois redresseurs hexaphasés, nous pourrions être tenté de conclure rapidement que le modèle BND serait applicable tel n'est cependant pas le cas comme l'illustre la figure 6.3. cela tient au fait que les deux redresseurs constituant le redresseur dodécaphasé ne fonctionnent pas de façon indépendante.

6.5. Conclusion

Une méthode générale de la détermination de l'amplitude de la somme des vecteurs aléatoires de fonction de densité de probabilité arbitraire a été présentée. Cette méthode est applicable à des vecteurs aléatoires statistiquement indépendants ou dépendants.

Un exposé a été donné sur l'utilisation de la méthode de sommation pour déterminer les courants harmoniques de ligne provenant de sources de courant aléatoires distribuées dans les réseaux de puissance stochastiques et déterministes. Une étude comparative entre la méthode développée ici et la simulation de Monte Carlo a révélé que les deux méthodes donnent des résultats étroitement concordantes. Cependant, la méthode analytique a des avantages additionnelles. Elle est beaucoup plus rapide que la méthode de Monte Carlo.

Chapitre 7 : Mesures expérimentales

7.1. Introduction

La production des courants harmoniques par une installation de plusieurs redresseurs a été abordée dans le chapitre précédent du point de vue essentiellement théorique. Afin de vérifier la validité des modèles de redresseurs et des méthodes de calcul utilisées pour estimer les harmoniques, des campagnes de mesures ont été réalisées.

Dans ce chapitre, des lois de densités de probabilité sur les amplitudes des harmoniques obtenus par simulation sont confrontées à celles déduites des relevés expérimentaux.

7.2. Mesures

7.2.1. Dispositif de mesure

Le système de mesure « Drantez Power Platform, Model 4300 » est un portable, possédant quatre canaux de tension et quatre canaux de courant. Les données peuvent être enregistrées et transférées à un ordinateur personnel pour une analyse ultérieure. L'insertion d'une carte dédiée au traitement des harmoniques et les événements transitoires change le modèle 4300 en un moniteur de qualité supérieure.

7.2.2. Installation de mesure

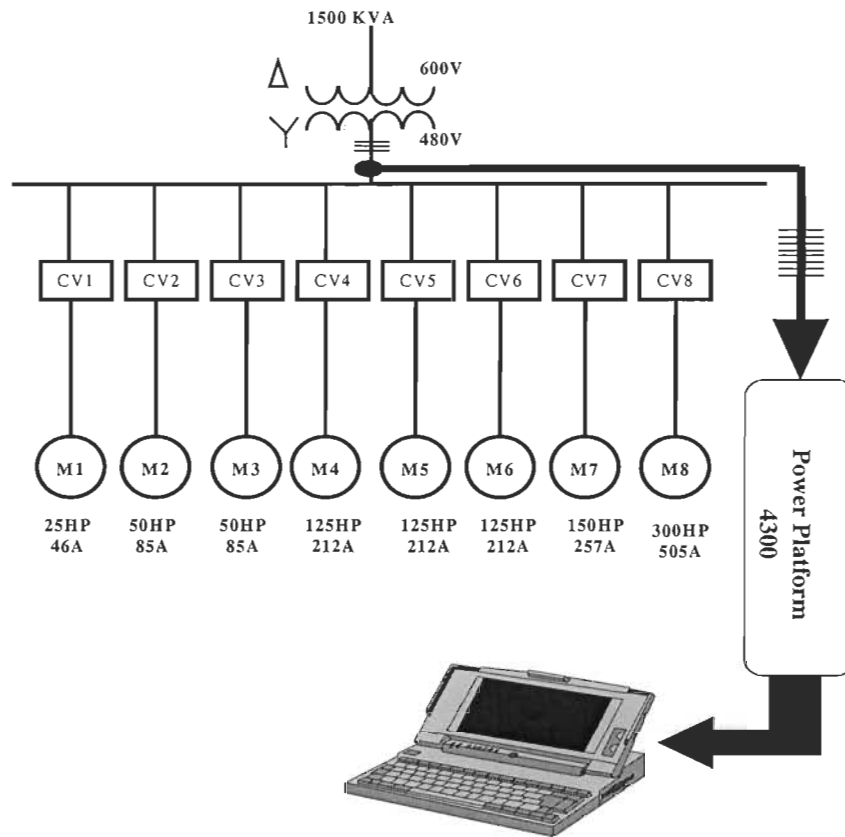


Figure 7.1: Installation contenant huit convertisseurs à thyristors pour moteurs à courant continu de la compagnie ALCAN à Shawinigan

La figure 7.1 représente un réseau contenant 8 convertisseurs à six pulsations à thyristors alimentant 8 moteurs à courant continu de puissance différente (Tableau 7.1). Leurs angles de commandes suivent individuellement des lois de probabilité différentes, ils sont présentés dans le tableau 7.5. La réactance de ligne, le taux d'ondulation et l'angle de commutation correspondant à chaque convertisseur sont donnés par le tableau 7.6. Puisque chaque phase de l'artère principale comporte quatre conducteurs, les mesures de courant ont été effectuées sur un seul conducteur en raison de la section et du calibre réduit des pinces ampèremétriques.

Chapitre 7

Il faudra donc multiplier les amplitudes des courants par 4 pour obtenir les valeurs réelles.

	Puissance en (Hp)	Courant rotorique en (Amp)	Tension rotorique en (Volt)	Courant statorique en (Amp)	Résistance statorique en (Ohm)	Vitesse en Tr/Min
M1	25	42.7	500	1.76/0.93	122	1750/2000
M2	50	83.7	500	2.32/1.70	93	1750/2100
M3	50	83.7	500	2.32/1.70	93	1750/2100
M4	125	202	500	3.9/2.3	56.9	1750/2500
M5	125	202	500	3.9/2.3	56.9	1750/2500
M6	125	202	500	3.9/2.3	56.9	1750/2500
M7	150	242	500	4/3.37	56	1750/2500
M8	300	480	500	7/4.4	33.7	1150/1600

Tableau 7.1: Caractéristiques des moteurs de l'installation électrique

7.2.3. Le logiciel d'acquisition de données Dran-View

Le concept essentiel de l'analyse harmonique, est qu'un signal temporel périodique à bande limitée peut être exprimé comme la somme de fonctions sinusoïdales et cosinusoïdales. Pour ce faire, les amplitudes et les phases harmoniques des fonctions sin/cos doivent être choisies adéquatement. Nous désignons ce processus de décomposition du signal temporel (forme d'onde) en composante d'amplitude et de phase comme étant l'analyse harmonique. Le logiciel « Dran-View » transforme le signal temporel en ces composantes équivalentes d'amplitudes et de phases en effectuant une transformée de Fourier. Une transformée rapide (FFT) ou discrète (DFT) est choisie automatiquement selon qu'il y'a un nombre binaire d'échantillons ou non. Les résultats sont

Chapitre 7

identiques pour les deux méthodes sauf que la FFT est généralement plus rapide. Presque toutes les implémentations de la FFT sont dépendantes de l'acquisition d'un nombre binaire d'échantillons sur la fenêtre de mesure. La FFT est appropriée pour les données du modèle 4300 parce que ces instruments ont été conçus pour relever un nombre binaire d'échantillons par période (généralement 128).

En utilisant une sommation appropriée des séries sin/cos, le signal temporel original (la forme d'onde) peut être approximativement reconstruit à partir de l'information fournie sur la phase et l'amplitude. L'ensemble complet des harmoniques requis combiné avec une précision arithmétique infinie peut rendre théoriquement possible la reconstitution exacte du signal. Le nombre d'harmoniques requis pour faire une reconstruction idéale doit être égale à $N/2$, où N est le nombre d'échantillons dans la fenêtre d'échantillonnage sélectionnée. Dran-View limite le nombre d'harmoniques affichés à 50.

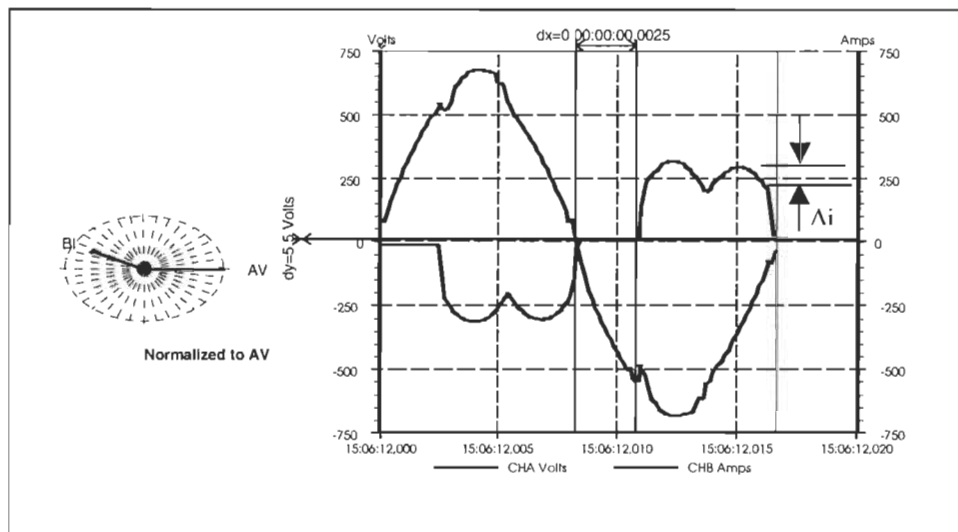


Figure 7.2: Tension composée de la phase A et courant de la phase B du convertisseur 8

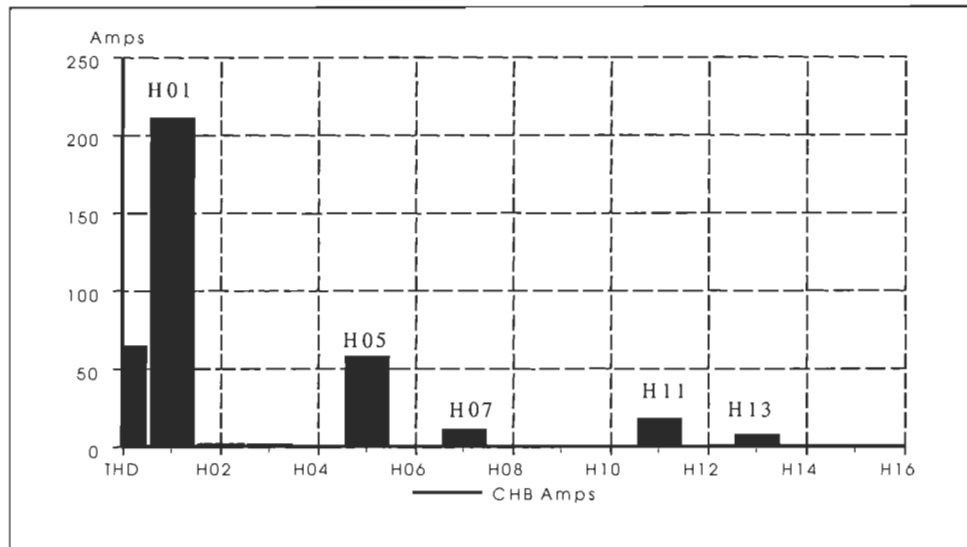


Figure 7.3: Spectre de courant (dans la phase B)

Pour trouver la densité de probabilité de l'angle d'allumage de chaque convertisseur, la connaissance de la valeur de l'angle d'allumage α de chaque événement est essentiel. À partir de l'événement illustré par les ondes de tension et de courant de la figure 7.2, on peut facilement identifier l'angle d'allumage qui correspond à la durée $\Delta x = 2.5ms$; la fréquence du réseau étant égale à 60Hz , l'angle d'allumage est donné par $\alpha = 2\pi f * \Delta x = 54^\circ$.

L'acquisition des événements se fait chaque quinze minute pendant une durée de deux jours ; ce qui nous donne une base de donnée permettant d'obtenir la densité de probabilité de l'angle α de chaque convertisseur .

7.3. Densité de probabilité de l'angle d'allumage

7.3.1. Le logiciel d'approximation Expert Fit

Exper Fit permet de déterminer automatiquement et précisément laquelle des distributions de probabilité représente le mieux un ensemble de données. Dans bien des cas, une analyse complexe peut être effectuée en moins de cinq minutes.

Un des objectifs secondaire du logiciel est de modéliser une source de données aléatoires en l'absence de données.

7.3.2. Angle d'allumage

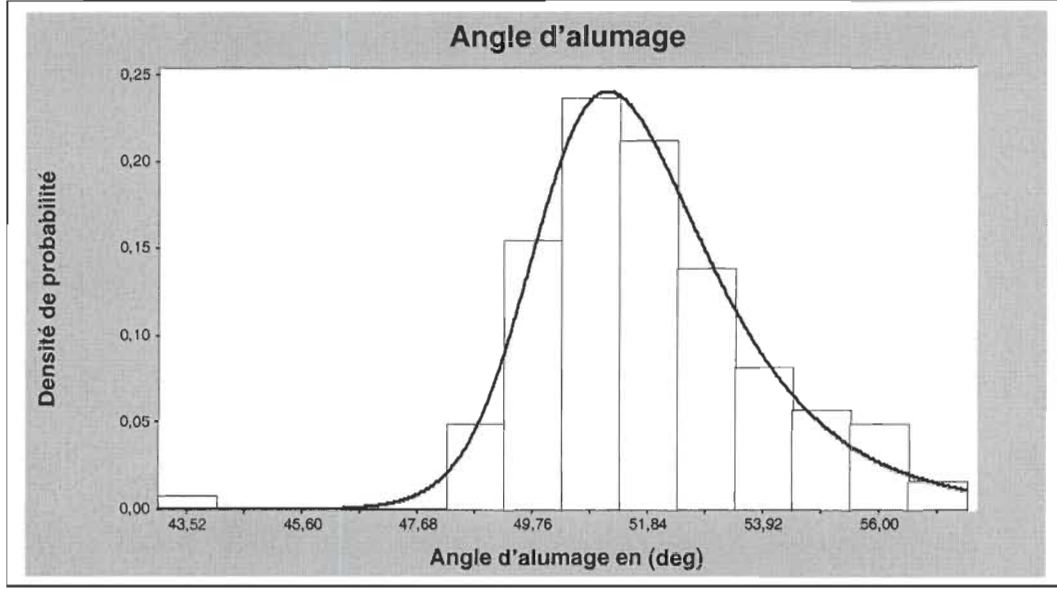


Figure 7.4: Densité de probabilité de l'angle d'allumage du convertisseur 8

La figure 7.4 représente la densité de probabilité de l'angle d'allumage et les histogrammes empiriques correspondants au convertisseur 8, la meilleure approximation de la loi est donnée par le modèle de Johnson décrit par l'équation 7.1. À partir de ce modèle on générera la variable aléatoire α afin de calculer les harmoniques de courant par simulation de Monte Carlo et les comparer à ceux obtenus expérimentalement.

$$f_{\alpha}(\alpha) = \frac{P_4}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{(\alpha - P_1)^2 + P_2^2})} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[P_3 + P_4 \ln\left(\frac{\alpha - P_1}{P_2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha - P_1}{P_2}\right)^2 + 1}\right)\right]^2\right\} \quad (7.1)$$

Chapitre 7

Modèle	Paramètres	
Johnson	P_1	57.95
	P_2	0.9
	P_3	-0.66
	P_4	1.22

Tableau 7.2: Paramètres du modèle de la densité de probabilité de l'angle α du convertisseur 8.

Nombre des échantillons	123
Minimum des échantillons	53,58
Maximum des échantillons	61,77
Moyenne	58.54
Variance	1.37
Coefficient de variation	0.01

Tableau 7.3: Bilan des échantillons des histogrammes de l'angle α du convertisseur 8.

Dans les chapitres précédents, des lois uniformes ont été considérées pour modéliser les variations aléatoires de α en raison des simplifications qu'elles apportaient dans les analyses. Bien qu'une loi différente soit obtenu expérimentalement, une loi uniforme approchée de même moyenne et variance peut être considérée pour la simulation [KAP 96].

Le tableau 7.2 présente les paramètres P_1 , P_2 , P_3 , P_4 estimés du modèle Johnson alors que le tableau 7.3 présente le bilan des échantillons sur lesquels nous nous sommes basés pour déterminer les histogrammes empiriques qui modélisent la densité de probabilité de l'angle d'allumage. L'analyse des 123 évènements enregistrés durant deux jours a permis d'obtenir la densité de probabilité présentée

à la figure 7.4. nous avons eu recours à ce type d'analyse parce que l'information sur l'angle d'allumage n'était pas directement accessible.

7.4. Comparaison

Dans ce paragraphe, les lois des densités de probabilité sur les amplitudes des harmoniques de courant obtenus par simulation de Monte Carlo sont confrontées à celles déduites des relevés expérimentaux, les modèles présentés dans les chapitres précédents ne seront pas utilisés, car les hypothèses de réactances de commutation nulle et surtout de réactance CC infinie ne tiennent plus d'après la forme d'onde de courant présentée à la figure 7.2 ; un autre modèle sera défini pour tenir compte de l'ondulation et de l'empiétement.

7.4.1. Modèle de Graham-Schonholzer

La décomposition de l'onde de courant de la figure 7.2 en series de Fourier permet d'obtenir l'harmonique de rang h en considérant l'approximation de [GRA 83] sous la forme suivante :

$$I_h = \frac{2\sqrt{2}I_c}{\pi} \left[\frac{\sinh \pi/3 \sinh \mu/2}{h^2 \mu/2} + \frac{r_c g_h \cos h\pi/6}{1 - \sin(\pi/3 + \mu/2)} \right] \quad (7.2)$$

avec

$$g_h = \left[\frac{\sin((h+1)(\pi/6 - \mu/2))}{h+1} + \frac{\sin((h-1)(\pi/6 - \mu/2))}{h-1} - \frac{2\sin(h(\pi/6 - \mu/2))\sin(\pi/3 + \mu/2)}{h} \right] \quad (7.3)$$

et

$$r_c = \Delta i / I_c \quad (7.4)$$

où r_c est le taux d'ondulation du courant de charge et Δi l'ondulation du courant.

Chapitre 7

La valeur instantanée du courant harmonique de rang h peut être exprimée par [GRA 83] :

$$i_h = I_h \sqrt{2} \sin h\pi/2 \sin(h(\omega t - \phi_1)) \quad (7.5)$$

où la phase est donnée par :

$$\phi_1 = \alpha + \mu/2 \quad (7.6)$$

r_c , et μ indiquent respectivement le taux d'ondulation, et l'angle de commutation . L'angle ϕ_1 représente la phase entre le fondamental de courant et la tension composée. Le courant I_c représente la moyenne du courant continu.

7.4.2. Résultats

7.4.2.1. Un seul convertisseur triphasé

Un programme a été écrit basé sur la méthode de Monte Carlo en vue de simuler le comportement probabiliste des harmoniques produits par un seul convertisseur, le modèle de Graham-Schonholzer est utilisé vu qu'il approche le plus fidèlement possible la forme d'onde du courant expérimental, le programme inclut les densités de probabilité des relevés expérimentaux qui sont décrites dans le tableau 7.4, le programme fait 10^4 tirages pour la variable aléatoire α qui obéit à une loi de Johnson donnée par l'équation (7.1). Les paramètres de simulation sont les suivants : $V = 480/\sqrt{3}$, $r_c = 0.57$, $\mu = 4.2^\circ$, $X_c = 10\Omega$

Chapitre 7

Harmoniques	Modèles	Paramètres du modèle	I_h min	I_h max
5	Johnson	$P_1=57.95, P_2=0.92,$ $P_3=-0.66, P_4=0.48$	50	61.77
7	Log normal	$P_1=0, P_2=2.11, P_3=-0.03$	7.44	13.1
11	Log normal	$P_1=0, P_2=2.83, P_3=0.03$	15.18	19.02
13	Log normal	$P_1=0, P_2=1.93, P_3=0.02$	6.14	8.94

Tableau 7.4: Paramètres des modèles expérimentaux des densités de probabilité des courants harmoniques du convertisseur 8

La loi Log-normal est définie comme suit [Exp 2000]:

$$f_{I_h}(I_h) = \begin{cases} \frac{1}{(I_h - P_1)(\sqrt{2\pi P_3^2})} \exp\left[-\frac{(\ln(I_h - P_1) - P_2)^2}{2P_3^2}\right] & \text{si } I_h > P_1 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \quad (7.7)$$

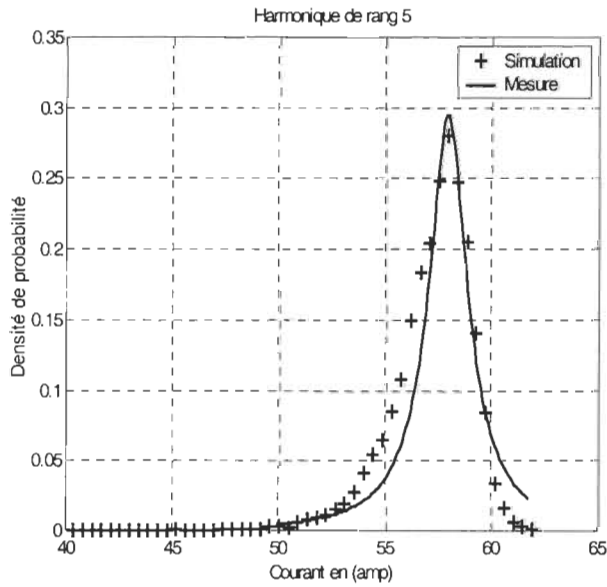


Figure 7.6: Densités de probabilité expérimentale et par simulation de Monte Carlo de I_5

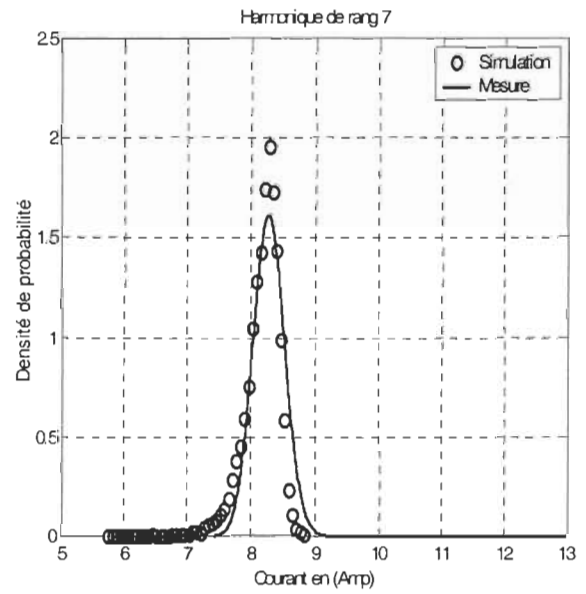


Figure 7.5: Densités de probabilité expérimentale et par simulation de Monte Carlo de I_7

Les densités de probabilité des amplitudes des harmoniques 5,7,11 et 13 calculées par la formule (7.2) en utilisant la simulation de Monte Carlo, et les densités de probabilité expérimentales apparaissent sur les figures 7.6, 7.7, 7.8 et 7.9. On peut mentionner qu'il y a une concordance entre les résultats de simulation et ceux obtenus expérimentalement, toutefois l'écart s'explique par l'estimation des paramètres non connus (angle d'allumage, taux d'ondulation, angle de commutation..), la précision du système de mesure, sans oublier que le modèle de Graham n'est qu'une approximation de la forme d'onde de la figure 7.2.

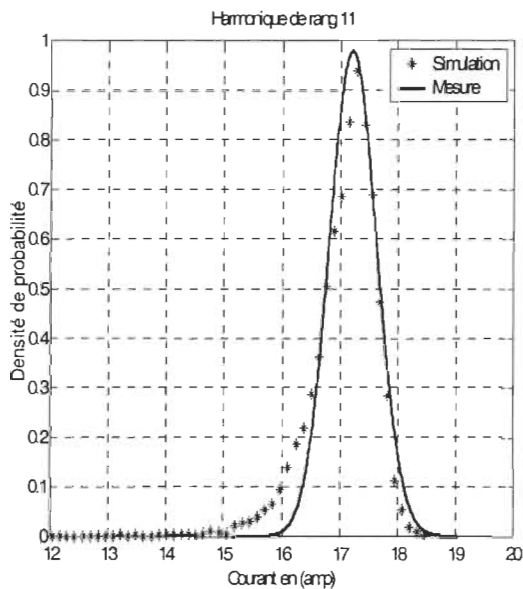


Figure 7.8: Densités de probabilité expérimentale et par simulation de Monte Carlo de I_{11}

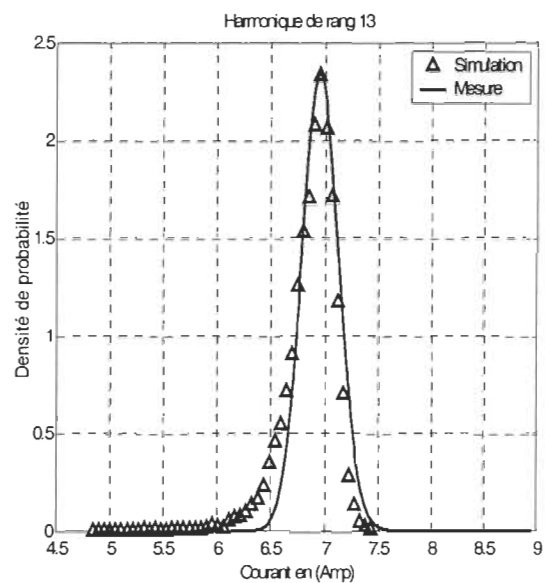


Figure 7.7: Densités de probabilité expérimentale et par simulation de Monte Carlo de I_{13}

Le processus permettant de trouver une distribution qui donne une bonne représentation de données commence en sélectionnant « automated Fitting » puisque tout ce que nous savons à propos des données est que les valeurs ne sont pas négatives. Nous choisissons les limites inférieures et supérieures de la variable

aléatoire I_h . Les modèles qu'Expert fit a déterminé comme étant les meilleures représentations de données sont tracés sur les figures (7.5)-(7.8). Nous constatons que la distribution « Johnson » a fourni le meilleur résultat relatif pour l'harmonique de rang 5 ; la distribution Log-normal est la meilleure approximation des harmoniques de rang 7, 11 et 13. Finalement, la moyenne du modèle et la moyenne des échantillons sont presque identiques.

7.4.2.2. Réseau de huit convertisseurs triphasés

La sommation des harmoniques aléatoires, engendrés par 8 convertisseurs de puissances différentes, est la somme de 8 vecteurs harmoniques :

$$\bar{R}_h = \sum_{i=1}^8 X_i + j \sum_{i=1}^8 Y_i$$

où X_i et Y_i sont respectivement les composantes réelles et imaginaires de l'harmonique de rang h produit par le $i^{\text{ème}}$ convertisseur.

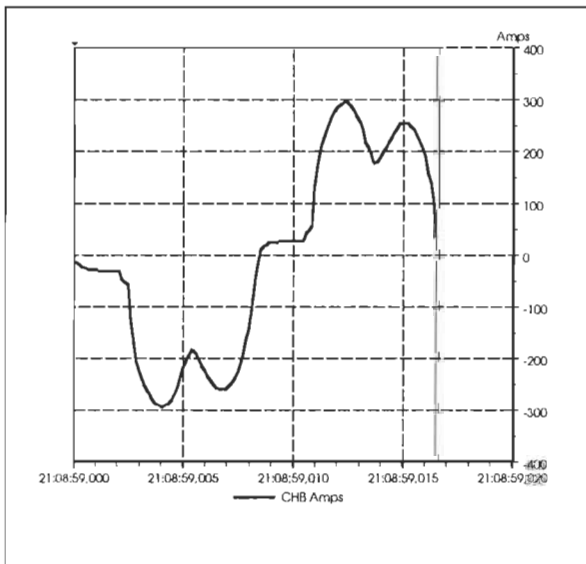


Figure 7.10 : Forme d'onde de courant au secondaire du transformateur (phase B)

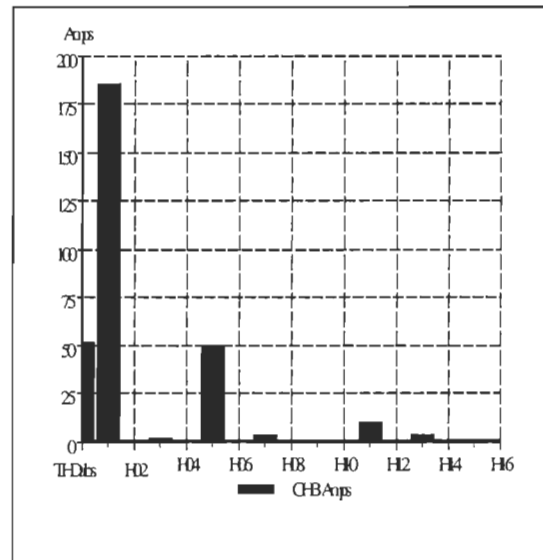


Figure 7.9 : Spectre de courant au secondaire du transformateur (phase B)

Chapitre 7

Les figures (7.9) et (7.10) montrent respectivement la forme d'onde et le spectre du courant en amont du transformateur, il est important de remarquer que seuls les harmonique de rangs $6k \pm 1$ sont significatifs.

Convertisseurs	Modèle	Paramètres	α_{\min} en (deg)	α_{\max} en (deg)
Convertisseur 1	Extreme Value	$P_1=60.60$ $P_2=5$	52.44	82
Convertisseur 2 et 3	Lognormal	$P_1=0$ $P_2=3.94$ $P_3=0.16$	37.68	73.38
Convertisseur 4, 5 et 6	Pearson	$P_1=0$ $P_2=8885.68$ $P_3=125.42$	58.33	87.28
Convertisseur 7	Weibull	$P_1=50.27$ $P_2=4.68$ $P_3=2.45$	50.43	59.15
Convertisseur 8	Johnson	$P_1=57.95$ $P_2=0.92$ $P_3=-0.66$ $P_4=1.22$	53,58	61.77

Tableau 7.5: Paramètres du modèle de la densité de probabilité de l'angle α de chaque convertisseur.

Les modèles présentés dans le tableau 7.5 sont une approximation des histogrammes empiriques de l'angle d'allumage mesurée. Les lois de la deuxième colonne sont définies comme suit [EXP 2000] :

- Extreme Value

$$f_{\alpha}(\alpha) = (1/P_2) \exp[-(\alpha - P_1)/P_2] \exp\{-\exp[-(\alpha - P_1)/P_2]\} \quad (7.8)$$

Chapitre 7

- Pearson

$$f_{\alpha}(\alpha) = \begin{cases} \frac{(\alpha - P_1)^{-(P_3+1)}}{P_2^{-P_3} \Gamma(P_3)} \exp\left[\frac{-P_2}{\alpha - P_1}\right] & \text{Si } \alpha > P_1 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \quad (7.9)$$

- Weibull

$$f_{\alpha}(\alpha) = \begin{cases} P_3 P_2^{-P_3} (\alpha - P_1)^{P_3-1} \exp\left\{-\left[\frac{\alpha - P_1}{P_2}\right]^{P_3}\right\} & \text{si } \alpha > P_1 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \quad (7.10)$$

- Normale

$$f_{I_h}(I_h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_2^2}} \exp\left[\frac{-(I_h - P_1)^2}{2P_2^2}\right] \quad (7.11)$$

Un programme en Matlab, basé sur la technique de Monte Carlo, a été écrit pour simuler le réseau électrique décrit par la figure 7.1. Le programme réalise 10^4 tirages aléatoires pour la variable α . Les courbes représentant les densités de probabilité calculées en utilisant le modèle de Graham-Schonholzer et les données des tableaux 7.5, 7.6 et 7.7 sont présentées sur les figures (7.11), (7.12), (7.13) et (7.14).

Convertisseurs	r_c	μ en (deg)	X_c en (Ω)
Convertisseur 1	0.1	4.96°	0.8
Convertisseur 2 et 3	2	2.37°	1.74
Convertisseur 4, 5 et 6	0.9	2.57°	5
Convertisseur 7	0.5	5.4°	5.3
Convertisseur 8	0.57	4.2°	10

Tableau 7.6: Taux d'ondulation r_c , angle de commutation μ et réactance de ligne correspondant à chaque convertisseur

Chapitre 7

Harmoniques	Modèles	Paramètres du modèle	I_h min	I_h max
5	Normal	$P1=63, P2=2.94$	54.06	76.08
7	Normal	$P1=5.5, P2=0.3$	4.02	8.01
11	Normal	$P1=14.5, P2=0.3$	13.02	19.05
13	Normal	$P1=4.3, P2=0.25$	2.15	6.28

Tableau 7.7: Paramètres des modèles expérimentaux des densités de probabilité de la somme des courants harmoniques des huit convertisseurs

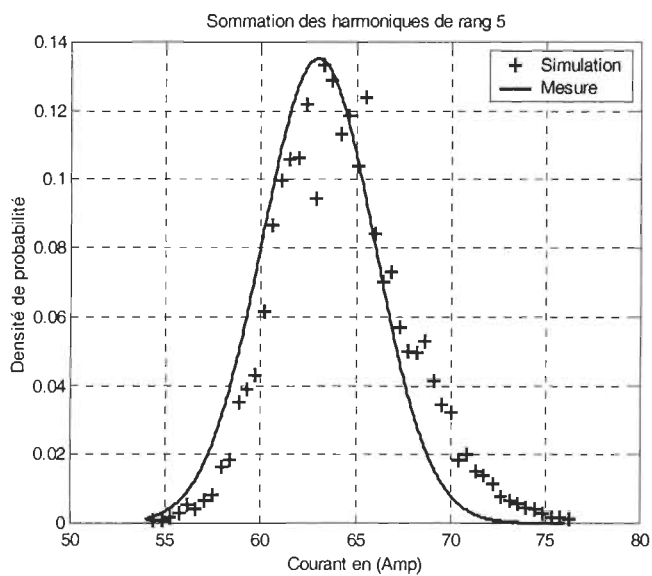


Figure 7.11: Densités de probabilité expérimentale et par simulation de Monte Carlo de la somme de I_5

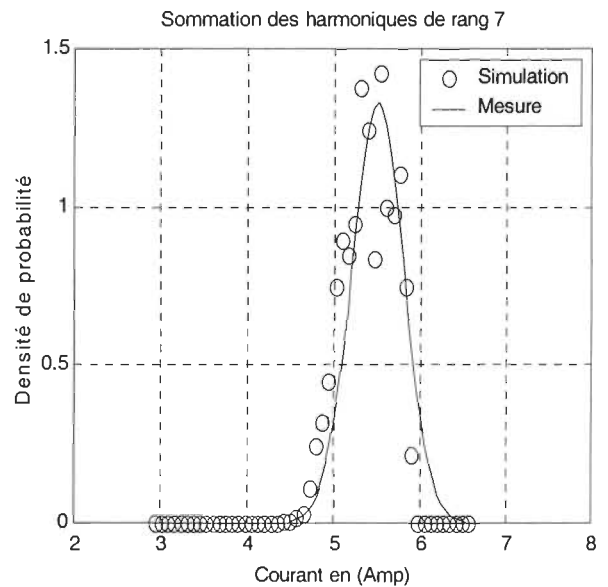


Figure 7.12: Densités de probabilité expérimentale et par simulation de Monte Carlo de la somme de I_7

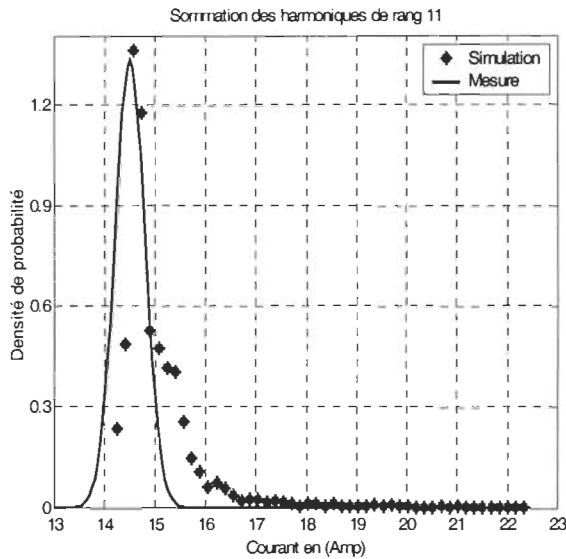


Figure 7.14: Densités de probabilité expérimentale et par simulation de Monte Carlo de la somme de I_{11}

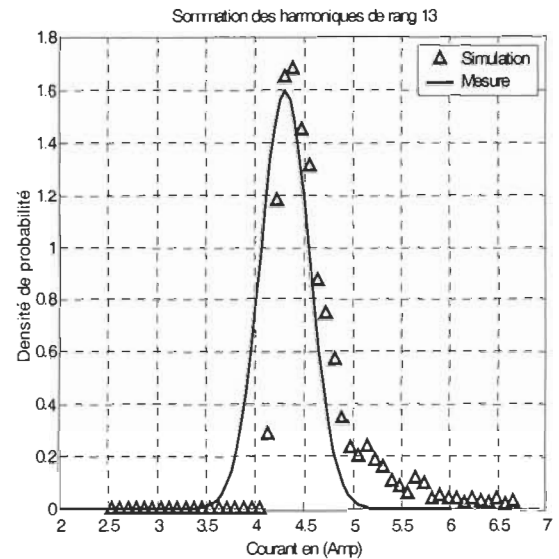


Figure 7.13: Densités de probabilité expérimentale et par simulation de Monte Carlo de la somme de I_{13}

La comparaison des densités de probabilité avec les histogrammes montre clairement que les modèles expérimentaux et la simulation de Monte Carlo basé sur le modèle Graham-Schonholzer s'accordent très bien. On constate une légère différence lorsque le rang harmonique est supérieur à 7. L'écart entre les lois de probabilités peut être expliqué aussi par l'estimation des paramètres du tableau 7.6, les modèles représentant les densités de probabilité de l'angle α et enfin sans oublier que tous les modèles des résultats expérimentaux sont des approximations des histogrammes empiriques.

7.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une comparaison entre les résultats expérimentaux et les simulations de Monte Carlo basées sur le modèle de Graham-Schonholzer qui tient compte de l'angle de commutation, du taux d'ondulation et de l'angle d'allumage. Il est opportun de souligner que le comportement probabiliste ne peut être bien modélisé que si nous tenons compte de la variabilité de tous les paramètres. Dans ce chapitre, nous avons supposé que l'angle d'allumage est la seule variable aléatoire, pour bien cerner le problème on devrait tenir compte de la variation aléatoire de l'angle de commutation et du taux d'ondulation.

Conclusion

Les perturbations harmoniques engendrées par des convertisseurs statiques hexaphasés et dodécaphasés, ont été étudiées dans ce mémoire suivant deux approches différentes: déterministe et probabiliste. Des résultats expérimentaux ont été confrontés aux résultats théoriques.

L'étude déterministe s'attache à découvrir les relations mathématiques permettant de prévoir les spectres harmoniques de courant du convertisseur pour une condition de fonctionnement déterminée. Dans le deuxième et le troisième chapitre, nous avons mis en évidence les relations entre les harmoniques (caractéristiques et non caractéristiques) et le déséquilibre de tensions de l'alimentation triphasée.

Une insuffisance majeure de l'étude déterministe réside dans l'incapacité de tenir compte de la variabilité et/ou de l'incertitude des paramètres. Pour ce faire, nous avons introduit la notion de variable aléatoire dans le modèle déterministe du convertisseur ; ce qui nous a permis d'effectuer l'analyse probabiliste des harmoniques. Dans les chapitres quatre et cinq, nous avons pu déduire les densités de probabilité du module et de la phase des harmoniques caractéristiques et non caractéristiques. Les propriétés de ces deux types d'harmoniques ont été comparées, sous l'angle probabiliste.

Lorsqu'on considère le cas de plusieurs convertisseurs, leur diversité de fonctionnement est un facteur essentiel pour déterminer la somme de leurs courants harmoniques. En extrapolant l'étude probabiliste des chapitres quatre et cinq, qui s'est limitée à modéliser les harmoniques produits par un seul convertisseur, nous avons abordé dans le chapitre six le problème concernant la

Chapitre 8

sommutation de ces harmoniques aléatoires. Nous avons utilisé la distribution normale bi-dimensionnelle (BND) et développé une méthode pour déterminer les cinq paramètres du modèle. Les résultats du modèle BND ont été validés par simulations numériques du type Monte Carlo dans le cadre d'un exemple d'application.

Dans le septième chapitre, les densités de probabilités théoriques sur les amplitudes sont confrontées à celles déduites des résultats expérimentaux. En utilisant un modèle qui tient compte de l'angle de commutation et du taux d'ondulation.

La notion d'harmonique aléatoirement variable a été largement et profondément discutée dans ce mémoire. Bien qu'à l'heure actuelle les normes concernant les limites de perturbations harmoniques soient basées sur l'approche déterministe, elles devraient, dans le futur, inclure progressivement des limites de perturbations basées sur l'approche probabiliste afin de tenir compte des situations plus réalistes. En outre, l'utilisation de méthodes probabilistes dans plusieurs applications telles que la conception de filtres harmoniques, le dimensionnement des appareils électriques, l'instrumentation, l'analyse de fiabilité etc., devrait permettre d'atteindre un meilleur compromis technico-economique.

Ce travail avait pour but de modéliser les sources harmoniques, en particulier les convertisseurs hexaphasés et dodécaphasés, et les installations multi-convertisseurs. Toutefois, pour évaluer correctement les perturbations harmoniques, non seulement les connaissances en matière des sources harmoniques, mais aussi celles concernant les impédances harmoniques doivent être disponibles. Les efforts devraient donc s'orienter vers la modélisation, déterministe aussi bien que probabiliste.

Bibliographie

[ABR 72] ABRAMOWITZ, M. et STEGUN, I. A., Handbook of Mathematical Functions, 10th Printing, Washington, DC : National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, 1972.

[BAG 87] BAGHAZOUZ et TAN, O.T., « Probabilistic modeling of power system harmonics », IEEE Trans. On Appl., Vol. IA-23, N°1, (1987), pp. 173-180.

[BLO 97] BLONDEL, J.ph. et GUÉRIN, P., « Prévion des harmoniques sur un réseau électrique » , REE, n° 3 (1997), p. 47-53.

[CAR 93] G. Carpinelli, F. Galiardi, M. Russo and A. Sturchio, "Steady-state Mathematical Models of Battery Storage Plants With Line-Commutated Converters," IEEE Trans. On Power Delivery, Vol. 8, No. 2, pp. 494-503, 1993.

[CAV 98] CAVALLINI, A., MAZZANTI, G., MONTANARI, G.C. et ROMAGNOLI, C., « Design of shunt capacitor circuits for power factor compensation in electrical systems supplying nonlinear loads : a probabilistic approach », IEEE Trans. On ind. Appl., vol. 34, n° 4 (1998), p. 675-681.

[CRU 89] CRUCQ, J. M. and ROBERT, A., « Statistical approach for harmonics measurement and calculations » 10th International Conference on Electricity Distribution, Brighton, 8-12 May 1989, IEE Conférence Publication, No, 305, PP. 91-96

[EMA 86] EMANUEL, A.E et KAPRIELIAN, S.R., « Contribution to the theory of statistically periodic harmonic in power systems », IEEE Trans. On Power Delivery, Vol. PWRD-1, N° 3, July 1986, pp. 285-293.

[EXP 2000] ExpertFit User's Guide, January, 2000 Edition, Copyright 1995-2000 by Averill M. Law and Stephen Vincent.

Bibliographie

- [GON 85] D.A. Gonzalez and J. C. McCall. « Design of filters to reduce harmonic distortion in industrial power system, » IEEE/IAS Conference Proceedings, pp. 361-370, 1985.
- [GRA 83] A.D. Graham and Schonholzer, « Line harmonics of converter with DC motor loads », IEEE Trans, Industry Applications, Vol. 19, No. 1, PP. 84-93, Feb. 1983.
- [HAM 64] J.M. Hammersley et D. C. Handscomb, «Monte Carlo Methods » , London, Chapman and Hall, 1964.
- [HAN 89] R. A. Hanna, "Harmonics and Technical Barriers in Adjustable Speed Drives," IEEE Trans. On Ind. Appl., vol. 25, No. 5, pp. 894-900, Sept./Oct. 1989.
- [JIN 86] Z. Jing, H. Fengreng, « Studies of harmonic in multiharmonic sources system », Second International Conference on Harmonic in Power Systems, Winnipeg Manitoba, October 6-8, 1986, pp. 319-329.
- [KAP 96] S.R. Kaprielian, A. Rabbani, « Determining the joint moments of motor drive's harmonic current phasors, » IEEE Trans.on Power Delivery, Vol. 11, No 1, pp. 444-451, 1996.
- [KAZ 89] KAZIBWE, W. E ; ORTEMeyer, T. H. et HAMMAN, M.S.A.A, « Summation of probabilistic harmonic vectors », IEEE Trans. On Power Delivery, vol.4, N°1, Jan (1989), p. 621-628
- [KIM 91] KIMBARK, E.W, « Direct current transmission », new York, Willey (1971).
- [KIT 81] R. H. Kitchin, "New Method for Digital-Computer Evaluation of Converter Harmonics in Power Systems Using State-Variable Analysis," *IEE Proc.*, Vol. 128, Pt. C, No. 4, pp. 196-207, 1981.
- [LAV 85] J.D. Lavers, B. Danai, « Statistical analysis of electric arc-furnace parameter variations », IEE Proc., Vol. 132, Part cNo. 2, March 1985, PP. 82-93.
- [LIN 98] LIN, K.-P, LIN, M.-H. et LIN, T.-P., « An advanced computer code for single-turned harmonic filter design », IEEE Trans. On ind. Appl., vol.34, n° 4 (1998), p. 640-648.

Bibliographie

- [MET 49], N. Metropolis et S. Ulam, « The Monte Carlo Method », Journal of the American Statistical Association, vol. 44 (1949), PP. 335-341.
- [NGA 2000] É. Ngandui, El J. Mohammed, G. Olivier, P. Sicard, “ Analytical Prediction of Harmonics Produced by a Twelve-Pulse Converter Under Unbalanced Supply Voltage,” 9th International IEEE Conference on Harmonics & Quality of Power (ICHQP), Octobre 2000.
- [NGA' 2000] É. Ngandui, M. Eljihad., A. Chériti, P. Sicard « Probabilistic Modeling of Harmonic Current Produced by Twelve-Pulse AC/DC Converter Under Unbalanced Supply Voltage », IEEE PES Summer meeting, july 2000
- [ORT 88] ORTMEYER, T. H. ; NAKIMOTO, N ; HIYAMA, T. et HAMMAM, M. S. A .A., « Harmonic performance of individual and group loads, », 3rd International Conf. On Harmonic in power Systems (ICHPS), 1988, pp. 277-283.
- [PAP 91] PAPOULIS, A. Probability, Random Variables, And Stochastic Processes 3rd Ed., Mc Graw-Hill, New York, 1991.
- [PHA 68] A. G. Phadke and J. H. Harlow, "Generation of Abnormal Harmonics in High-Voltage AC-DC Power Systems," IEEE Trans. on Power Appar. Syst., PAS-87, No. 3, pp. 873-883, 1968.
- [PIE 87] PIERRAT, L. et MEYER, J.P « Unbalance factor It is as simple as ABC », Revue Générale de l'électricité, N°6, Juin 1987, PP. 18-26
- [PIE 90] PIERRAT, L.; Wang, Y.J. “Analytical study of uncharacteristic resulting from AC/DC converters” 4th International Conference on Harmonic in Power Systems (Budapest, Hungary, October 4-6, 1990, pp. 481-487.
- [PIE 91] PIERRAT, L.; Wang, Y.J. and FEUILLET, R.
“Unified Model for the Determination of Current Harmonics Produced by an AC/DC Converter under diverse perturbations, Part I: Analysis and Formulation”, International Conference on High Technology in Power Industry, March 4-7 1991, Cheng-Kung University, Tainan, Taiwan, PP. 219-223.

Bibliographie

- [PIE 93] PIERRAT, L. « Sur les conditions d'apparition d'une composante inverse dans un circuit triphasé stationnairement équilibré », Note II-517, Compte –Rendue de l'académie des sciences (CRAS), (1993).
- [REE 68] J. Reeve and P. C. S. Krishnaya, "Unusual Current Harmonics Arising from High-Voltage DC Transmission," IEEE Trans. on Power Appar. Syst., PAS-87, No. 3, pp. 883-893, 1968
- [ROW 74] N.B. Rowe, « Summation of randomly-Varying phasors or vectors with particular reference to harmonic levels », IEE Conf. Publ. 110, 1974, pp. 177-181.
- [SHE 72] W.G. Sherman, « Summation of harmonic with random phase angles », IEE proc., Vol.119, No. 11, November 1972, pp. 1643-1648.
- [WAN 92] Y.j. Wang, L.Pierrat, R.Feuillet, « An analytical method for predicting current harmonics produced by an AC/DC converter under unbalanced supply voltage » ETEP Vol. 2, N°4, July/August 1992
- [WAN 93] Y. J. Wang et L. Pierrat, «Probabilistic modelling of current produced by an ac/dc converter under voltage unbalance », IEEE Trans. On Power Delivery, vol. 8, n° 4, pp. 2060-2066, 1993.
- [YAC 81] YACAMINI, R et SMITH, W.J., « Negative sequence impedance of converters », IEE Proc.vol.128,Pt.B, n°3, May (1981), p. 161-166

Annexe A : Publications

- É. Ngandui, El J. Mohammed, G. Olivier, P. Sicard, “ Analytical Prediction of Harmonics Produced by a Twelve-Pulse Converter Under Unbalanced Supply Voltage,” *9th International IEEE Conference on Harmonics & Quality of Power (ICHQP)*, Octobre 2000, P 365-370.
- [NGA 2000] É. Ngandui, M. Eljihad., A. Chériti, P. Sicard « Probabilistic Modeling of Harmonic Currents Produced by Twelve-Pulse AC/DC Converter Under Unbalanced Supply Voltage », *IEEE PES Summer meeting*, july 2000

ANALYTICAL PREDICTION OF HARMONICS PRODUCED BY A TWELVE-PULSE CONVERTER UNDER UNBALANCED SUPPLY VOLTAGE

Éloi NGANDUI

El Jihad MOHAMMED

*Guy OLIVIER

Pierre SICARD

Departement of Electrical and computer Engineering
Chaire de Recherche Industrielle Hydro-Québec/CRSNG
Université du Québec à Trois-Rivières
P.O. Box 500, Trois-Rivières, QC, Canada, G9A 5H7
e-mail: eloi_ngandui@uqtr.quebec.ca

*Departement of Electrical and Computer Engineering
École Polytechnique de Montréal
P.O. Box 6079, Station A, Montréal, QC, Canada, H3C 3A7
e-mail: olivier@electech.polymtl.ca

Abstract: AC/DC converters generate harmonic currents in power systems. A detailed analysis of harmonic currents produced by ac/dc converters under non-ideal operating conditions can be quite time consuming. In this paper, a simple analytical method is proposed for calculating harmonic currents produced by a twelve-pulse ac/dc thyristor converters under unbalanced supply voltage. Simplified models of magnitudes and phase angles of harmonic currents are derived as function of complex voltage unbalanced factor assuming equidistant phase angle control. Simulation results are presented to confirm the validity of the analytical method.

I. INTRODUCTION

AC/DC converters are extensively used in many industry applications. It is well established that current harmonics create damaging effects on power system equipment. Because of the great influence of harmonics on power system operation, harmonic generation by static converters has been realized to be an important issue. Harmonic distortion level mainly depends on the converter design, the type of control used, the supply and load conditions. Twelve-pulse ac/dc converters are widely used for high power applications such as HVDC, large rated dc or ac drives, and for large rated dc power supplies. Utilities usually require twelve-pulse ac/dc converters for high power loads because they produce less supply harmonic current distortion compared to standard six-pulse bridge converters. Twelve-pulse converter is customary obtained from two six-pulse converters series-connected or parallel-connected which are supplied through transformers with delta/gye and delta/delta windings. Transformers connections allow to obtain two sets of three-phase voltages, phase displaced by 30 electrical degrees with respect to each other.

Many studies are made with the aim to predict harmonics currents produced by converter loads. Most analytical converter harmonic models available in the literature are dedicated to converter performance analysis under normal working conditions [1]. Under non ideal operating conditions such as voltage unbalance, asymmetrical commutation impedance, firing angle errors, etc, digital simulation methods are suitable for harmonic currents analysis [2]. However, a high computing effort is required and the results

obtained do not give enough interpretation for the mechanism of harmonic generation. Simple mathematical relationships between voltage unbalance and harmonic currents have been derived in [3] considering a six-pulse ac/dc converter of individual phase control type. From those relationships it is easy to analyze variations of magnitudes and phase angles of harmonic current with voltage unbalance. In this paper, simple analytical models of both harmonic magnitudes and phase angles of harmonic currents generated by a twelve-pulse converter under unbalanced voltage supply are derived assuming equidistant phase angle control.

It is well known that under non-ideal operating conditions twelve-pulse converter generates in addition to harmonics of orders $12k \pm 1$ (k integer), non negligible values of fifth and seventh order harmonics (typically 3%-6% of load current) [4-8]. Analytical harmonic current models of ac/dc converters under non ideal operating conditions such as those found in many studies [9-13] are rarely necessary for engineering purposes since reasonable approximations often better satisfy some practical applications. The aim of this paper is to estimate the emission of harmonic currents by a twelve-pulse converter under unbalance voltage supply by simplified analytical models with the following assumptions: good dc smoothing, negligible overlap periods and equidistant phase angle control. Simulation results are presented to confirm the validity of the proposed analytical harmonic current models.

II. TWELVE-PULSE CONVERTER CONFIGURATION

There exist many configurations of twelve-pulse ac/dc converter. However, in many applications a single transformer with one primary (star connected or delta connected) and two secondaries (one in star and the other in delta) supplies both bridges. In this paper, a twelve-pulse converter with a delta connected primary is considered. Fig. 1 shows a twelve-pulse converter composed of two six-pulse bridges series-connected. It is assumed that separate firing circuits are used to control the twelve-pulse scheme. The two three-phase source sets (i.e. (e_{a1}, e_{b1}, e_{c1}) and $(e_{a'1}, e_{b'1}, e_{c'1})$) supplying the six-pulse bridges are phase displaced by 30 degrees with respect to each other. The load is modeled by a source of dc emf E_c in series with a resistance R_d and an inductance L_d . The analysis of harmonic currents generation

by the twelve-pulse converter is carry out with the following assumptions:

- Smoothing reactor at the dc side has infinitely large value;
- AC supply voltages are only of the fundamental ac frequency;
- The source impedance is ignored;
- Twelve-pulse converter is of equidistant pulse control type.

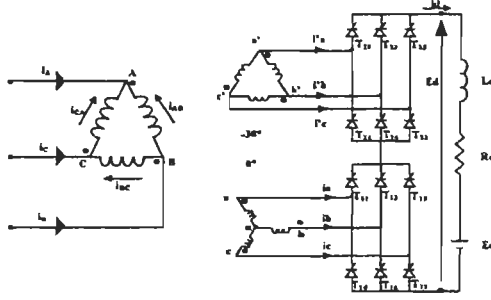


Fig. 1. Twelve-pulse converter scheme

III. MODELING OF VOLTAGE UNBALANCE

To describe harmonic currents behavior, voltage unbalance for the ac voltage is defined by an "unbalanced factor" (ratio of negative-sequence component to positive-sequence component at the fundamental source frequency) and the "unbalanced angle" (relative angle between the negative-sequence and positive-sequence component). Negative/positive-sequence voltage ratio is a suitable parameter which facilitates the representation of the effect of voltage unbalance on the converter behavior since the zero sequence has no effect on the converter behavior. Taking the positive-sequence as reference vector, the complex unbalance factor UF is defined as follows [11]:

$$UF = \frac{E_2}{E_1} \angle \beta = \tau \angle \beta \quad (1)$$

where, E_1 et E_2 are the rms values of the positive and negative sequence components, respectively; τ and β are known as unbalanced factor and unbalanced angle, respectively.

The transformer ratio is chosen so that (see Fig. 1):

$$E_{an}/E_{AB} = 1 \quad (2)$$

$$E_{an'}/E_{AB} = \sqrt{3} \quad (3)$$

It is known that if a positive-sequence set experiences a phase shift of Δ , then a negative-sequence set will undergo a phase shift of $-\Delta$. Assuming that the set of unbalanced input voltages supplying bridge 1 (supplied by the star connection) is characterized by voltage unbalanced factor τ and unbalanced

angle β , and assuming zero turn ratio error, it follows that the input voltages for each of the two bridges can be expressed as:

$$\begin{cases} e_{an} = \sqrt{2}E_1 \sin(\omega t) + \sqrt{2}E_2 \sin(\omega t + \beta) \\ e_{bn} = \sqrt{2}E_1 \sin(\omega t - 2\pi/3) + \sqrt{2}E_2 \sin(\omega t + \beta + 2\pi/3) \\ e_{cn} = \sqrt{2}E_1 \sin(\omega t + 2\pi/3) + \sqrt{2}E_2 \sin(\omega t + \beta - 2\pi/3) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} e_{an'} = \sqrt{2}E_1 \sin(\omega t + \Delta) + \sqrt{2}E_2 \sin(\omega t + \beta - \Delta) \\ e_{bn'} = \sqrt{2}E_1 \sin(\omega t + \Delta - 2\pi/3) + \sqrt{2}E_2 \sin(\omega t + \beta - \Delta + 2\pi/3) \\ e_{cn'} = \sqrt{2}E_1 \sin(\omega t + \Delta + 2\pi/3) + \sqrt{2}E_2 \sin(\omega t + \beta - \Delta - 2\pi/3) \end{cases} \quad (5)$$

where, phase voltages e_{an} , e_{bn} and e_{cn} , refer to input voltages supplying bridge 1 and phase voltages $e_{a'n'}$, $e_{b'n'}$ and $e_{c'n'}$, refer to those supplying bridge 2.

It can be shown that, if the positive-sequence is taken as voltage base (i.e. equal to 1 p.u.) and reference vector, the zero crossing angles γ_m , $n \in \{1, 2, 3\}$, of commutation voltage e_{ac} , e_{ba} and e_{cb} , respectively, and given in [11], can be expressed as function of voltage unbalanced factor and unbalanced angle as follows:

$$\gamma_{n,ac(1,2,3)} = \tan^{-1} \frac{-\cos(2n\pi/3) + \tau \cos(\beta + 2n\pi/3)}{\sin(2n\pi/3) + \tau \sin(\beta + 2n\pi/3)} \quad (6)$$

The zero crossing angles γ'_m , $n \in \{1, 2, 3\}$, of commutation voltages $e_{a'c'}$, $e_{b'a'}$ and $e_{c'b'}$, respectively, are also expressed as function of voltage unbalance factor τ and unbalanced angle β as follows:

$$\gamma'_{n,ac(1,2,3)} = \tan^{-1} \frac{-\cos(\Delta - 2n\pi/3) + \tau \cos(\beta - \Delta + 2n\pi/3)}{-\sin(\Delta - 2n\pi/3) + \tau \sin(\beta - \Delta + 2n\pi/3)} \quad (7)$$

Under balanced conditions (i.e. τ is equal to 0), the zero crossing angles γ_m , $n \in \{1, 2, 3\}$, and γ'_m , $n \in \{1, 2, 3\}$, are given as follows:

$$\gamma_{n,ac(1,2,3)} = \tan^{-1} \frac{-\cos(2n\pi/3)}{\sin(2n\pi/3)} = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

$$\gamma'_{n,ac(1,2,3)} = \tan^{-1} \frac{-\cos(\Delta - 2n\pi/3)}{-\sin(\Delta - 2n\pi/3)} = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \Delta \quad (9)$$

Taking δ_m , $n \in \{1, 2, 3\}$ as the phase shifts introduced in zero crossing angles of commutation voltages because of the presence of the negative-sequence voltage, the following relations between the phase shifts and zero crossing angles can be written:

$$\delta_{n,ac(1,2,3)} = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \gamma_{n,ac(1,2,3)} \quad (10)$$

$$\delta'_{n,ac(1,2,3)} = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \Delta - \gamma'_{n,ac(1,2,3)} \quad (11)$$

δ_m , $n \in \{1, 2, 3\}$ and δ'_m , $n \in \{1, 2, 3\}$ indicate the deviations of the crossover points of the ac line voltage waves e_{ac} , e_{ba} and e_{cb} .

and $e_{a'c'}$, $e_{b'a'}$ and $e_{c'b'}$, from their normal angular positions, respectively. It can be established that:

$$\delta_{n,m(1,2,3)} = \tan^{-1} \frac{-(-1)^n \tau \sin(\beta + n\pi/3)}{1 - (-1)^n \tau \cos(\beta + n\pi/3)} \quad (12)$$

$$\delta'_{n,m(1,2,3)} = \tan^{-1} \frac{-(-1)^n \tau \sin(\beta + \pi/3 + n\pi/3)}{1 - (-1)^n \tau \cos(\beta + \pi/3 + n\pi/3)} \quad (13)$$

IV. CONVERTER HARMONICS UNDER VOLTAGE UNBALANCE

Six-pulse and twelve-pulse converters performances under unbalanced voltage supply depend on the control method used to generate the reference signal according to which the firing angle α of the respective thyristor is determined. The only work that has addressed simplified analytical prediction of magnitudes and phase angles of harmonic currents as function of complex unbalanced factor is that of Wang et al. [3] who present a study on six-pulse converters of individual phase control type. However, a commonly used control method of microprocessor based converter systems is equidistant pulse control [14]. In this control scheme one gating pulse is referenced with respect to the zero crossing of a line voltage and the remaining gating pulses are placed in equal space time intervals according to the pulse period. A thyristor is triggered by a firing signal that is delayed by α electrical degrees from the crossover points of its commutation voltage (α is the so-called firing angle). The switching instants are then obtained by shifting the reference pulse by 0° , 60° , 120° , 180° , 240° , 300° , respectively. Thus the deviation in line voltage zero-crossings has a direct effect on the firing instants of thyristors, hence on the harmonic current phase of six-pulse converters and consequently in magnitudes and phase angles of twelve-pulse converters if two separate control circuits are used. Separate control circuits approach for twelve-pulse or multi-pulse converters are usually preferred since operation in six-pulse mode, if required, could be obtained only with minor changes [15].

In the subsequent sections, equidistant phase angle control is considered and it is assumed that commutation voltage e_{ac} , is used as line voltage synchronization of bridge 1 whereas commutating voltage $e_{a'c'}$ is used as line voltage synchronization of bridge 2. Thus the firing conditions are determined by $\omega t = \gamma_1 + \alpha$ for bridge 1 and $\omega t = \gamma'_1 + \alpha$ for bridge 2. The wave forms of currents in phase a and phase a' of bridge 1 and bridge 2, respectively, are shown in Fig. 2. From Series Fourier expansion, the current wave shapes shown in Fig. 2 give the following instantaneous h -th harmonic current expressions in phase a and a' of bridge 1 and bridge 2 inputs, respectively:

$$i_{ah} = \frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h\pi}{3} \cos h \left(\omega t + \delta_1 - \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \quad (14)$$

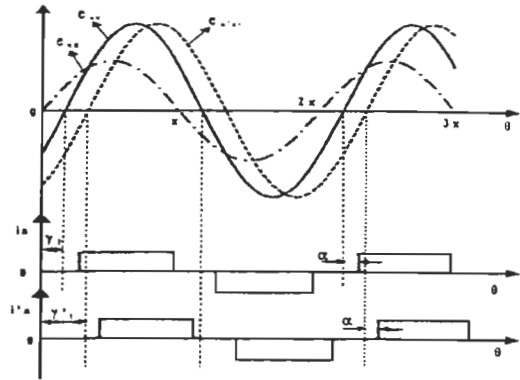


Fig.2. Voltage and current wave forms

$$i_{a'h} = \frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h\pi}{3} \cos h \left(\omega t + \delta'_1 - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (15)$$

where I_d is the average dc load current.

In the same manner, instantaneous h -th harmonic currents in phase b and c of bridge 1, phase b' and c' of bridge 2 inputs are given as follows:

$$i_{bh} = -\frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h\pi}{3} \cos h \left(\omega t + \delta_1 - \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \quad (16)$$

$$i_{ch} = -\frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h\pi}{3} \cos h \left(\omega t + \delta_1 - \alpha + \frac{\pi}{6} \right) \quad (17)$$

$$i_{b'h} = -\frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h\pi}{3} \cos h \left(\omega t + \delta'_1 - \alpha - \frac{\pi}{3} \right) \quad (18)$$

$$i_{c'h} = -\frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h\pi}{3} \cos h \left(\omega t + \delta'_1 - \alpha \right) \quad (19)$$

where, $h = 6k \pm 1$, $k=1,2,3,\dots$

It can be established that the instantaneous primary line input currents of the twelve-pulse converter shown in Fig. 1 are given as follows:

$$i_A = i_a - i_c + \sqrt{3} i_{a'} \quad (20)$$

$$i_B = i_b - i_a + \sqrt{3} i_{b'} \quad (21)$$

$$i_C = i_c - i_b + \sqrt{3} i_{c'} \quad (22)$$

The instantaneous h -th harmonic phase currents in delta windings due to bridge 1 are given by the following equations:

$$i_{ab} - i_{ca} = \pm (-1)^k \frac{6I_d}{h\pi} \cosh \left(\theta + \delta_1 - \alpha - \frac{\pi}{3} \right) \quad (23)$$

$$i_{ba} - i_{ab} = \mp (-1)^k \frac{6I_d}{h\pi} \cosh \left(\theta + \delta_1 - \alpha - \frac{\pi}{3} \right) \quad (24)$$

$$i_{ca} - i_{ba} = \pm (-1)^k \frac{6I_d}{h\pi} \cosh (\theta + \delta_1 - \alpha) \quad (25)$$

Using the previous equations, some developments are carry out with distinction between twelve-pulse converter characteristic harmonic of order $h=12k\pm1$ and noncharacteristic harmonics of order $h=12k-6\pm1$.

A. Twelve-pulse converter characteristic harmonics ($h=12k\pm1$)

The instantaneous expressions of primary line input harmonic currents of order $h=12k\pm1$, $k=1,2,3,\dots$, produced by the twelve-pulse converter of Fig. 1 is derived as follows:

$$i_{Aa} = \pm \frac{12I_d}{h\pi} \cosh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \cosh\left(\omega t + \frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (26)$$

$$i_{Ba} = \mp \frac{12I_d}{h\pi} \cosh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \cosh\left(\omega t + \frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{\pi}{3}\right) \quad (27)$$

$$i_{Ca} = \pm \frac{12I_d}{h\pi} \cosh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \cosh\left(\omega t + \frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha\right) \quad (28)$$

The above eqns. allow the magnitude and phase angle of the h -th harmonic current to be derived as explicit function of τ and β . From (26), the magnitude and phase angle of the h -th harmonic current in phase A can be derived as follows:

$$I_{Ah} = \frac{12I_d}{h\pi} \left| \cosh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \right| \quad (29a)$$

$$\psi_{Ah} = h \left(\frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) - \pi \left\{ 1 - U \left[\pm \cosh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \right] \right\} \quad (29b)$$

where, U is the unit step function defined as:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < 0, \\ 1, & \text{if } x \geq 0. \end{cases}$$

B. Twelve-pulse converter noncharacteristic harmonics ($h=12k-6\pm1$)

The instantaneous expressions of primary line input harmonic currents in phase A of order $h=12k-6\pm1$, $k=1,2,3,\dots$, produced by the twelve-pulse converter of Fig. 1 is derived as follows:

$$i_{Aa} = \pm \frac{12I_d}{h\pi} \sinh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \sinh\left(\omega t + \frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (30)$$

$$i_{Ba} = \mp \frac{12I_d}{h\pi} \sinh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \sinh\left(\omega t + \frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{\pi}{3}\right) \quad (31)$$

$$i_{Ca} = \pm \frac{12I_d}{h\pi} \sinh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \sinh\left(\omega t + \frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha\right) \quad (32)$$

From (30), magnitude and phase angle of the h -th harmonic current in phase A are derived as follows:

$$I_{Ah} = \frac{12I_d}{h\pi} \left| \sinh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \right| \quad (33a)$$

$$\psi_{Ah} = h \left(\frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{2} - \pi \left\{ 1 - U \left[\pm \sinh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \right] \right\} \quad (33b)$$

V. SIMPLIFICATION OF THE MODEL

To estimate more easily the effect of voltage unbalance on harmonic production an approximate model is required. The deviation angles δ_m , $n \in \{1, 2, 3\}$ and δ'_m , $n \in \{1, 2, 3\}$ are normally small since the strong limitations of the voltage unbalance in power systems see compatibility levels in the standards of $\tau = 2$ to 3% . Thus, the arc-tan functions in (12) and (13) can be approximated by their argument. More over, the denominator in those eqns. can be replaced with unity without significant error. Then the approximate formulas for deviation angles δ_m , $n \in \{1, 2, 3\}$ and δ'_m , $n \in \{1, 2, 3\}$ are derived as follows:

$$\delta_{n, n \in \{1, 2, 3\}} \approx -(-1)^n \tau \sin(\beta + n\pi/3) \quad (34)$$

$$\delta'_{n, n \in \{1, 2, 3\}} \approx -(-1)^n \tau \sin(\beta + \pi/3 + n\pi/3) \quad (35)$$

Since the deviation angles δ_m , $n \in \{1, 2, 3\}$ and δ'_m , $n \in \{1, 2, 3\}$ are small, first order approximation of cosine and sine functions in (29) and (33) leads to approximate formulas of amplitude and phase angle of the h -th harmonic current in phase A.

A. Characteristic harmonics of order $h=12k\pm1$

Equation (29) can be simplified by using (34) and (35) to obtain approximate magnitude and phase angles of the h -th harmonic :

$$I_{Ah} \approx \frac{12I_d}{h\pi} \quad (36a)$$

$$\psi_{Ah} \approx h \left(\frac{\sqrt{3}\tau \cos \beta}{2} - \alpha - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (36b)$$

Equation (36a) reveals that voltage unbalance has negligible effect upon twelve-pulse converter characteristic h -th harmonic current magnitude whereas (36b) provides an effective way to examine its phase angle behavior.

B. Noncharacteristic harmonics of order $h=12k-6\pm1$

Similarly, (33) can be simplified using (34) and (35) to obtain h -th noncharacteristic harmonic magnitude:

$$I_{Ah} = \frac{6I_d}{\pi} |\tau \sin \beta| \quad (37a)$$

$$\psi_m = h \left(\frac{\sqrt{3}\tau \cos \beta}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{2} - \pi \left\{ 1 - U \left[\pm h \left(\frac{\tau \sin \beta}{2} \right) \right] \right\} \quad (37b)$$

Equation (37a) reveals that the magnitude of twelve-pulse converter noncharacteristic harmonics are independent of harmonic order h . Equation (37b) provides an effective way to examine twelve-pulse converter noncharacteristic harmonics phase angle behavior. It can be easily noticed from (37b) that when β varies from 0° to 360° , noncharacteristic harmonics (i.e. 5th, 7th, 17th, ... harmonics) experience a discontinuity in the phase angle variation. This observation is similar to that made in [3] concerning triplen harmonics produced by a six-pulse converter under voltage unbalance.

Similar formulations can be obtained for phases B and C by using (27), (31) and (28), (32), respectively, along with approximate formulas deviation angles given by (34) and (35).

VI. SIMULATION RESULTS

The variations of 5th, 7th, 11th, 13th harmonic magnitudes (in phase A) versus β are plotted in Fig. 3 for the operating conditions $\alpha = 15^\circ$, $\tau = 5\%$, $E_c = 0$ and $R_d = 1$ p.u. (data taken from [3]). The simplified model given by (36a) and (37a) agree with the basic model defined by (29a) and (33a). Better agreement is obtained with small unbalanced factor τ . Since (29a), (33a), (36a) and (37a) required DC current I_d for harmonic calculations, (38) is used to evaluate I_d assuming that the influence of AC voltage unbalance on DC current is insignificant [11]:

$$I_d = E_d / R_d = 6\sqrt{6}E_c \cos(\alpha) / (\pi R_d) \quad (38)$$

where, E is the rms. value of the positive-sequence voltage.

Because the model simplification of the magnitudes involves approximation of sine and cosine functions containing the product of harmonic order h and deviation angles, better agreement is expected for lower order harmonics, that's why the simplified model gives less errors for the 5th and 7th than the 11th and 13th harmonics. Fig. 4 shows the harmonic phase angles variations corresponding to the magnitude variations shown in Fig. 3. The discontinuities of the phase variations of the 5th and 7th harmonics are clearly shown on this figure. This confirms the observation made in [3] which states that discontinuity of phase angle variations with unbalanced angle variations is an indicator of noncharacteristic harmonics.

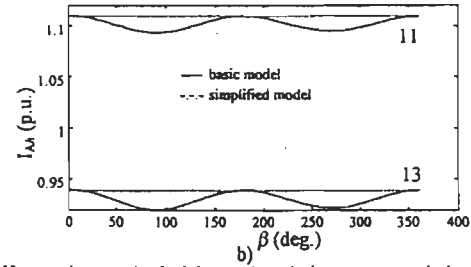
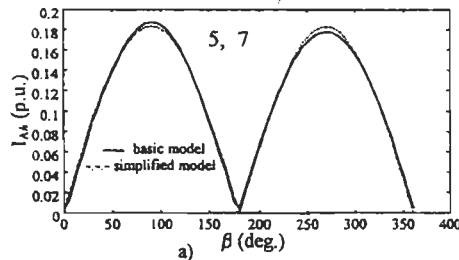


Fig. 3 : Harmonic magnitude (phase A) variations versus unbalanced angle β : a) 5th and 7th harmonics; b) 11th and 13th harmonics

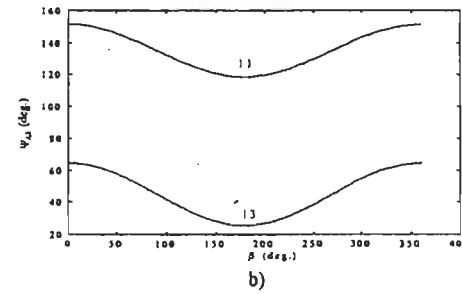
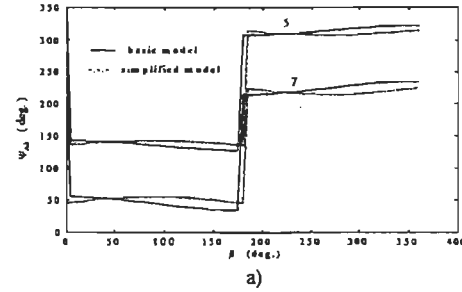


Fig. 4 : Harmonic phase angle (phase A) variations versus unbalanced angle β : a) 5th and 7th harmonics; b) 11th and 13th harmonics

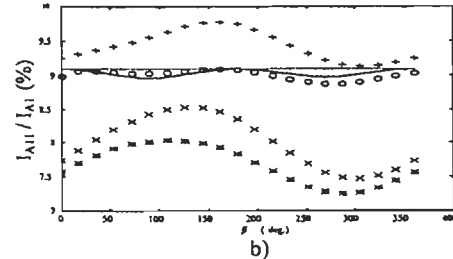
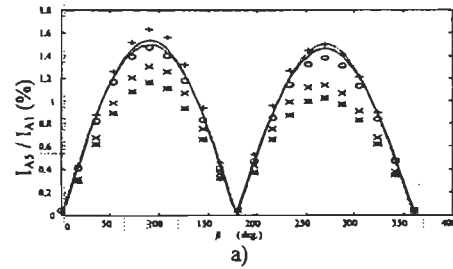


Fig. 5 : Relative harmonic magnitude (phase A) variations versus unbalanced angle β : a) 5th harmonic; b) 11th harmonic.

— basic model; --- simplified model; o case 1; * case 2; + case 3; x case 4

VII. DISCUSSION

In order to show the errors resulting from neglecting overlap angles (μ) and dc current ripple (Δi_d), similar to [3], four cases were considered and harmonic current calculations carried out by means of switching functions approach which is an effective and proved method [9-12]. In recent papers [11-12] by some of the authors, it was shown by simulations of harmonic currents produced by multipulse thyristor converters under non-ideal operating conditions that switching functions approach gives good results as compared to the standard software package «EMTP». Table 1 lists the value of AC side commutation inductance L_s (equivalent inductance as viewed from the input of every Graetz bridge), DC side smoothing inductance L_d , overlap angle μ and DC current ripple which is defined as the percentage of the peak-to-peak DC current over average DC current. For the four cases it is assumed that $E = 1.0$ pu; $\tau = 0.03$; $\alpha = 15^\circ$, $E_c = 0$ and $R_d = 0$. Fig. 5a reveals that the model estimates well the tendency of the variations of 5th (same for 7th) harmonic versus β . It can be noticed in Fig. 5a and 5b that case 3 has values over that calculated by the model; this is mainly due to DC ripple which has the effect of increasing 5th and 11th harmonic. For 13th harmonic, the models give the maximum values.

Table 1: Simulations parameters

Case	L_s (p.u.)	L_d (p.u.)	μ (deg.)	DC current ripple (%)
1	.002	300	1.5	0
2	.0173	300	10.02	0
3	.002	.429	1.5	5
4	.0173	.338	10.02	5

VIII. CONCLUSION

This paper presents an efficient approach to calculate both characteristic ($12k \pm 1$) and non-characteristic ($12k-6 \pm 1$) harmonic currents produced by a twelve-pulse converter under unbalanced supply voltage in practical power systems where unbalanced factor is generally less than 3%. From the proposed analytical models, it is easy to analyze variations of magnitudes and phase angles of harmonic current with voltage unbalance. Simulations results confirm the validity of the analytical models approximations. The proposed harmonic current models are suitable for engineering purposes since they can be used for initial estimations in the process of harmonic filter design.

IX. REFERENCES

- [1] E.W. Kimbark, "Direct Current Transmission," Wiley 1971.
- [2] R. H. Kitchin, "New Method for Digital-Computer Evaluation of Converter Harmonics in Power Systems Using State-Variable Analysis," *IEE Proc.*, Vol. 128, Pt. C, No. 4, pp. 196-207, 1981.
- [3] Y. J. Wang, L. Pierrat and R. Feuillet, "An Analytical Method for Predicting Current harmonics by an AC/DC Converter under Unbalanced Supply Voltage," *ETEP*, Vol. 2, No. 4, pp. 237-244, July/Aug. 1992.
- [4] A. G. Phadke and J. H. Harlow, "Generation of Abnormal Harmonics in High-Voltage AC-DC Power Systems," *IEEE Trans. on Power Appar. a. Syst.*, PAS-87, No. 3, pp. 873-883, 1968.
- [5] J. Reeve and P. C. S. Krishnaya, "Unusual Current Harmonics Arising from High-Voltage DC Transmission," *IEEE Trans. on Power Appar. a. Syst.* PAS-87, No. 3, pp. 883-893, 1968.
- [6] G. Carpinelli, F. Galiardi, M. Russo and A. Sturchio, "Steady-state Mathematical Models of Battery Storage Plants With Line-Commutated Converters," *IEEE Trans. On Power Delivery*, Vol. 8, No. 2, pp. 494-503, 1993.
- [7] D.A. Gonzalez and J. C. McCall, "Design of filters to reduce harmonic distortion in industrial power system," *IEEE/IAS Conference Proceedings*, pp. 361-370, 1985.
- [8] R. A. Hanna, "Harmonics and Technical Barriers in Adjustable Speed Drives," *IEEE Trans. On Ind. Appl.*, vol. 25, No. 5, pp. 894-900, Sept/Oct. 1989.
- [9] Lihua Hu and Robert Yacamini, "Harmonic Transfer through Converters and HVDC Links," *IEEE Trans. on Power Elect.*, vol. 7, No. 3, pp. 514-525, July 1992.
- [10] M. Sakui and H. Fujita, "Calculation of harmonic currents in a three-phase convertor with unbalanced power supply conditions," *IEE Proc.-B*, Vol. 139, No. 5, pp. 478-484, Sept. 1992.
- [11] E. Ngandui, G. Olivier, G.-E. April and A. O. Ba, "Comprehensive Switching Function Approach to Calculate Harmonics Produced by Multipulse Thyristor Converters Operating Under Unbalanced Supply," *8th International Conference ICHQP*, pp. 837-843, 1998.
- [12] E. Ngandui, G. Olivier, G.-E. April and A. O. Ba, "Harmonic Analysis in Multipulse Thyristor Converters Under Unbalanced Voltage Supply Using Switching Functions," *Canadian Journal of ELECT. & COMP. ENG.* Vol. 24, No. 4, pp. 137-147, October 1999.
- [13] P. N. Enjeti, P.D. Ziogas, "Analysis of static power converter under unbalanced power supply conditions," *IEEE Trans. Ind. Elect.*, vol. 37, no.1 pp. 91-93, 1990.
- [14] F.P. Dawson and R.B., "High Performance Single-Chip Gating Circuit for Phase-Controlled Bridge," *IEEE Trans. On Ind. Elect.*, Vol. 41, No. 4, pp. 467-470, 1994.
- [15] G. Olivier and N. Shankar, "A 5-kV-MW Variable DC Source," *IEEE Trans. on Ind. Appl.*, Vol. 26, No. 1, pp. 590-597, Jan./Feb. 1990.

Probabilistic Modeling of Harmonic Currents Produced by a Twelve-Pulse AC/DC Converter Under Unbalanced Supply Voltage

Éloi NGANDUI El Jihad MOHAMMED Ahmed CHÉRITI Pierre SICARD

Hydro-Québec Research Chair on Power and Electrical Energy
Département of Electrical and Computer Engineering
Université du Québec à Trois-Rivières
P.O. Box 500, Trois-Rivières, QC, Canada, G9A 5H7
Tél. : (819) 376 5011 ext. 3925; Fax. : (819) 376 5219; e-mail : eloi_ngandui@uqtr.quebec.ca

Abstract: Previous work on harmonic modeling have shown that the probabilistic approach is suitable to harmonic prediction since it allows to take into account the randomly varying operating conditions of static converters. Although the six-pulse ac/dc converter has already been the subject of probabilistic modeling, little consideration has been given to the twelve-pulse ac/dc converter. In high power applications such as large rated dc and ac drives, large rated dc power supplies, twelve-pulse ac/dc converters are usually preferred since they allow to reduce system disturbances due to harmonic currents. This paper presents an analysis of the random properties of harmonic currents produced by a twelve-pulse ac/dc converter that operates under random variations of its dc load and voltage unbalance. The probability density functions of the amplitudes and the phase angles of the harmonic currents (of orders $12k \pm 1$ and $12k-6 \pm 1$) are established and validated by results obtained from Monte Carlo simulations.

Keywords: Random Harmonics, Probabilistic Modeling, Power Converters

I. INTRODUCTION

The number and the power ratings of static converters are continuously growing in the power supply networks so that, harmonics they generate become alarming for electrical supply utilities and consumers, considering the harmful effects they create [1]. It is estimated that in a near future, 60 % of electrical energy consumed will pass through power converters [2]. Because of the great influence of harmonics on power system operation, harmonic generation by static converters has been realized to be an important issue. The loads controlled by power converters may vary randomly and the harmonic currents produced by these nonlinear loads should be analyzed using a probabilistic approach. On the other hand, random variations of harmonics are related to random disturbances such as three-phase voltage unbalance or asymmetric line impedance in the distribution feeder which not only influence the production of characteristic harmonics but also cause the production of non-characteristic harmonics [3]. For accurate prediction of the harmonics effect on electrical equipment and power devices optimization, it is very important to take into account random variations of harmonic currents produced by power converters. The total harmonic current injected into the bus, for a given harmonic order, depends heavily on the probability characteristics of the harmonic sources. The rms

value of the total harmonic current can be significantly less than a «worst case» obtained by a deterministic approach [4]. With insufficient knowledge of the probability features of individual harmonic-generating loads, the summation of harmonics cannot be accurately evaluated. Harmonic distortion level mainly depends on the converter design, the type of control used, the supply and load conditions. Twelve-pulse ac/dc converters are widely used for high power applications such as HVDC, large rated dc or ac drives, and for large rated dc power supplies. Utilities usually require twelve-pulse ac/dc converters for high power loads because they produce less supply harmonic current distortion compared to standard six-pulse bridge converters. Twelve-pulse ac/dc converters are customarily obtained from two six-pulse ac/dc converters series-connected or parallel-connected that are supplied through transformers with delta/wye and delta/delta windings. Transformers connections allow to obtain two sets of three-phase voltages, phase displaced by 30 electrical degrees with respect to each other. Although the six-pulse ac/dc converter has already been the subject of probabilistic modeling [3], little consideration has been given to the twelve-pulse ac/dc converter.

This paper presents an analysis of the random properties of harmonic currents produced by a twelve-pulse ac/dc converter that operates under random variations of its dc load and voltage unbalance. The probability density functions of the amplitudes and the phase angles of the harmonic currents (of orders $12k \pm 1$ and $12k-6 \pm 1$) are established and validated by results obtained from Monte Carlo simulations. A simplified converter model will be used for the probabilistic harmonic analysis, while a more accurate converter model will be used in Monte Carlo simulations to verify analysis.

II. MODELING OF VOLTAGE UNBALANCE

The twelve-pulse converter scheme considered in the following analysis is shown in Fig. 1. For the sake of clarity, the analysis carried out in [5] is briefly presented here and in the subsequent section.

Taking the positive-sequence voltage as reference vector and base voltage (i.e. 1 p.u.), the complex unbalance factor UF is defined as follows [3]:

$$UF = \tau \angle \beta \quad (1)$$

where, τ and β are known as unbalanced factor and unbalanced angle, respectively.

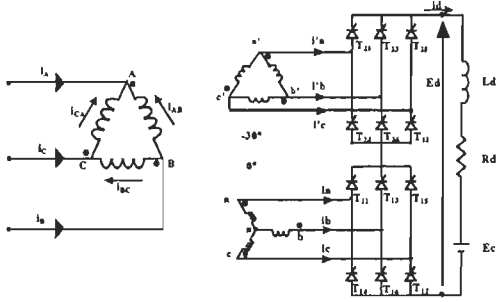


Fig. 1. Twelve-pulse converter scheme

Assuming that the set of unbalanced input voltages supplying bridge 1 is characterized by voltage unbalanced factor τ and unbalanced angle β , and assuming zero turn ratio error, input voltages for each of the two bridges can be expressed as:

$$\begin{cases} e_{an} = \sqrt{2} \sin(\omega t) + \sqrt{2}\tau \sin(\omega t + \beta) \\ e_{bn} = \sqrt{2} \sin(\omega t - 2\pi/3) + \sqrt{2}\tau \sin(\omega t + \beta + 2\pi/3) \\ e_{cn} = \sqrt{2} \sin(\omega t + 2\pi/3) + \sqrt{2}\tau \sin(\omega t + \beta - 2\pi/3) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} e_{a'n'} = \sqrt{2} \sin(\omega t + \Delta) + \sqrt{2}\tau \sin(\omega t + \beta - \Delta) \\ e_{b'n'} = \sqrt{2} \sin(\omega t + \Delta - 2\pi/3) + \sqrt{2}\tau \sin(\omega t + \beta - \Delta + 2\pi/3) \\ e_{c'n'} = \sqrt{2} \sin(\omega t + \Delta + 2\pi/3) + \sqrt{2}\tau \sin(\omega t + \beta - \Delta - 2\pi/3) \end{cases} \quad (3)$$

where, Δ (≈ -30 degrees) is the phase displacement between the two sets of three-phase voltages (e_{ac} , e_{ba} , e_{cb}) and ($e_{a'c'}$, $e_{b'a'}$, $e_{c'b'}$).

Taking δ_n , $n \in \{1, 2, 3\}$ and δ'_n , $n \in \{1, 2, 3\}$ as the phase shifts introduced in zero crossing angles of commutation voltages (e_{ac} , e_{ba} , e_{cb} , and $e_{a'c'}$, $e_{b'a'}$, $e_{c'b'}$, respectively) because of the presence of the negative-sequence voltage, the following relations can be established:

$$\delta_{n, n \in \{1, 2, 3\}} = \tan^{-1} \frac{-(-1)^n \tau \sin(\beta + n\pi/3)}{1 - (-1)^n \tau \cos(\beta + n\pi/3)} \quad (4)$$

$$\delta'_{n, n \in \{1, 2, 3\}} = \tan^{-1} \frac{-(-1)^n \tau \sin(\beta + \pi/3 + n\pi/3)}{1 - (-1)^n \tau \cos(\beta + \pi/3 + n\pi/3)} \quad (5)$$

III. CONVERTER HARMONICS UNDER VOLTAGE UNBALANCE

In order to reduce mathematical difficulties, the following assumptions are made: instantaneous commutation, smooth dc current, pure sinusoidal voltage waveform. Considering equidistant phase angle control and assuming that commutation voltage e_{ac} , is used as line voltage synchronization of bridge 1 whereas commutation voltage $e_{a'c'}$ is used as line voltage synchronization of bridge 2. Thus the firing conditions are determined by $\omega t = \gamma_1 + \alpha$ for bridge 1 and $\omega t = \gamma'_1 + \alpha$ for bridge 2 (see Fig. 2), where α is the firing angle, γ_1 and γ'_1 are zero crossing angle of e_{ac} and $e_{a'c'}$, respectively.

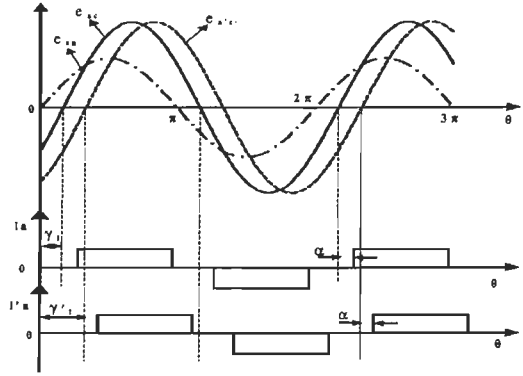


Fig. 2. Voltage and current wave forms

A. Twelve-pulse converter characteristic harmonics ($h=12k \pm 1$)

The instantaneous expression of primary line input harmonic current in phase A of order $h=12k \pm 1$, $k=1, 2, 3, \dots$, produced by the twelve-pulse converter of Fig. 1 is derived as follows:

$$i_{Ah} = \pm \frac{12 I_d}{h\pi} \cosh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \cosh\left(\omega t + \frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (6)$$

From (6), the amplitude and phase angle of the h -th harmonic current in phase A can be derived as follows:

$$I_{Ah} = \frac{12 I_d}{h\pi} \left| \cosh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \right| \quad (7)$$

$$\psi_{Ah} = h \left(\frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) - \pi \left\{ 1 - U \left[\pm \cosh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \right] \right\} \quad (8)$$

where, U is the unit step function defined as:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < 0, \\ 1, & \text{if } x \geq 0. \end{cases}$$

B. Twelve-pulse converter non-characteristic harmonics ($h=12k-6\pm1$)

The instantaneous expression of primary line input harmonic current in phase A of order $h=12k-6\pm1$, $k=1,2,3,\dots$, produced by twelve-pulse converter of fig. 1 is derived as follows:

$$i_{Ah} = \pm \frac{12 I_d}{h\pi} \sinh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \sinh\left(\omega t + \frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (9)$$

From (9), amplitude and phase angle of the h -th harmonic current in phase A can be derived as follows:

$$I_{Ah} = \frac{12 I_d}{h\pi} \left| \sinh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \right| \quad (10)$$

$$\psi_{Ah} = h \left(\frac{\delta_1 + \delta'_1}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{2} - \pi \left\{ 1 - U \left[\pm \sinh\left(\frac{\delta_1 - \delta'_1}{2}\right) \right] \right\} \quad (11)$$

IV. SIMPLIFICATION OF THE MODEL

The deviation angles δ_n , $n \in \{1, 2, 3\}$ and δ'_n , $n \in \{1, 2, 3\}$ are normally small since the strong limitations of the voltage unbalance in power systems see compatibility levels in the standards of $\tau = 2$ to 3 %. Then the approximate formulas for deviation angles δ_n , $n \in \{1, 2, 3\}$ and δ'_n , $n \in \{1, 2, 3\}$ are derived as follows:

$$\delta_{n, n \in \{1,2,3\}} \approx -(-1)^n \tau \sin(\beta + n\pi/3) \quad (12)$$

$$\delta'_{n, n \in \{1,2,3\}} \approx -(-1)^n \tau \sin(\beta + \pi/3 + n\pi/3) \quad (13)$$

A. Characteristic harmonics of order $h=12k\pm1$

Equations (7) and (8) can be simplified by using (12) and (13) to obtain approximate amplitude and phase angles of the h -th harmonic :

$$I_{Ah} \approx \frac{12 I_d}{h\pi} \quad (14)$$

$$\psi_{Ah} \approx h \left(\frac{\sqrt{3}\tau \cos \beta}{2} - \alpha - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

B. Non-characteristic harmonics of order $h=12k-6\pm1$

Equations (10) and (11) can be simplified by using (12) and (13) to obtain approximate amplitude and phase angles of the h -th harmonic :

$$I_{Ah} = \frac{6 I_d}{\pi} |\tau \sin \beta| \quad (16)$$

$$\psi_{Ah} = h \left(\frac{\sqrt{3}\tau \cos \beta}{2} - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{2} - \pi \left\{ 1 - U \left[\pm h \left(\frac{\tau \sin \beta}{2} \right) \right] \right\} \quad (17)$$

Similar formulation can be obtained for phases B and C.

To simplify the analysis, the case of a resistive dc load with a counter emf E_c assumed to be zero is considered. Neglecting the influence of ac voltage unbalance on the dc current, I_d is approximately given by:

$$I_d = E_d / R_d = (6\sqrt{6}E \cos \alpha) / (\pi R_d) \quad (18)$$

where $E_d = (6\sqrt{6}E \cos \alpha) / (\pi)$ refers to the converter output dc voltage, E is the phase to neutral voltage in rms value of positive-sequence component, R_d is the dc side resistance and α is the firing angle. Then, (14) and (16) can be written as:

$$I_{Ah} = \frac{72\sqrt{6}E \cos \alpha}{h\pi^2} = \frac{12C \cos \alpha}{h}, \quad h = 12k \pm 1 \quad (19)$$

$$I_{Ah} = \frac{36\sqrt{6}E \cos \alpha}{h\pi^2} \tau |\sin \beta| = 6C \cos \alpha \tau |\sin \beta|, \quad h = 12k - 6 \pm 1 \quad (20)$$

$$\text{where, } C = 6\sqrt{6}E / \pi^2 R_d \quad (21)$$

V. PROBABILISTIC HARMONIC MODELS

Variations of α reflect dc load fluctuations, while random τ and β represent random variations of voltage unbalance. Random variables will be denoted by bold face type letters such as α , τ , β , I_{Ah} , φ_{Ah} and the corresponding specific values in normal style, i.e. α , τ , β , I_{Ah} , φ_{Ah} . The probability density functions (pdfs) of random variables α , τ and β are given by [3]:

$$f_\alpha(\alpha) = 1/(\alpha_2 - \alpha_1), \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \quad (22)$$

$$f_\tau(\tau) = (\tau / \sigma^2) \exp[-\tau^2 / (2\sigma^2)], \quad \tau \geq 0 \quad (23)$$

$$f_\beta(\beta) = 1/(2\pi), \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi \quad (24)$$

In the following sections, I_{Ah} and Ψ_{Ah} will be used for characteristic amplitude and phase, respectively; J_{Ah} and φ_{Ah}

will be used to identify non-characteristic harmonic amplitude and phase, respectively.

A. pdfs of harmonic amplitudes

Since I_{Ah} given by (19) depends only on α it's pdf is given as follows:

$$f_{I_{Ah}}(I_{Ah}) = \frac{1}{\Delta\alpha\sqrt{(12C/h)^2 - I_{Ah}^2}}, \frac{12C\cos\alpha_2}{h} < I_{Ah} < \frac{12C\cos\alpha_1}{h} \quad (25)$$

where $h=12k\pm1$ and $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.

When both dc load and voltage unbalance are random, the pdf of J_{Ah} can be established by considering the product of two independent random variables. Equation (20) can be written as : $J_{Ah} = xy$ where $x = 6C\cos\alpha$ and $y = \tau|\sin\beta|$. their pdf of x is given as follows:

$$f_x(x) = \frac{1}{\Delta\alpha\sqrt{(6C)^2 - x^2}}, 6C\cos\alpha_2 < x < 6C\cos\alpha_1 \quad (26)$$

Since $\tau|\sin\beta|$ has a half-normal distribution, pdf of y is given by:

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2\right], y > 0 \quad (27)$$

The independence between x and y allows their joint density function to be written as the product of $f_x(x)$ and $f_y(y)$:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2\right]}{\sigma\Delta\alpha\sqrt{2\pi(36C^2 - x^2)}}, 6C\cos\alpha_2 < x < 6C\cos\alpha_1 \quad (28)$$

It can be established, using development similar to that in [3]:

$$f_{J_{Ah}}(J_{Ah}) = \int_{6C\cos\alpha_2}^{6C\cos\alpha_1} \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma\Delta\alpha\sqrt{36C^2 - x^2}} \exp\left(-\frac{J_{Ah}^2}{2\sigma^2 x^2}\right) dx \quad (29)$$

where $h=12k-6\pm1$.

B. Pdf of harmonic phase angles

Phase angle ψ_{Ah} of characteristic harmonic given by (15) can be written as the sum of two random variables \mathbf{Z} and \mathbf{W} :

$$\psi_{Ah} = \mathbf{Z} + \mathbf{W} = -h\alpha + \left(-\frac{h\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + \frac{h\sqrt{3}\tau\cos\beta}{2}\right), h=12k\pm1 \quad (30)$$

$$\mathbf{Z} = -h\alpha \quad (31) \quad \mathbf{W} = -\frac{h\pi}{6} - \frac{\pi}{2} + \frac{h\sqrt{3}\tau\cos\beta}{2} \quad (32)$$

$$f_z(z) = 1/(h\Delta\alpha); -h\alpha_2 < z < -h\alpha_1 \quad (33)$$

$$f_w(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{w-m_{hw}}{\sigma_h}\right)^2\right] \quad (34)$$

where $m_{hw} = -h\pi/6 - \pi/2$ and $\sigma_h = (h\sqrt{3}/2)\sigma$.

The pdf of ψ_{Ah} can be found using the inverse Laplace transform of the product as in [3]. Thus,

$$f_{\psi_{Ah}}(\psi_{Ah}) = L^{-1}\{L[f_z(z)]L[f_w(w)]\} \\ = \frac{1}{2h\Delta\alpha} \left[\text{erf}\left(\frac{\psi_{Ah}+a_2}{\sqrt{2}\sigma_h}\right) - \text{erf}\left(\frac{\psi_{Ah}+a_1}{\sqrt{2}\sigma_h}\right) \right] \quad (35)$$

where, $a_1 = h\alpha_1 - m_{hw}$, $a_2 = h\alpha_2 - m_{hw}$ and erf denotes the error function.

The pdf of φ_{Ah} can be obtained by considering the following formula:

$$\varphi_{Ah} = \mathbf{Z} + \mathbf{T} + \mathbf{Q} \quad (36)$$

where,

$$\mathbf{T} = -\frac{2h\pi}{3} + \frac{h\sqrt{3}\tau\cos\beta}{2} \quad (37)$$

$$\mathbf{Q} = -\frac{\pi}{2} - \pi \left[1 - U\left(\sin\left(\pm\frac{h}{2}\tau\sin\beta\right)\right) \right] \quad (38)$$

Random variable \mathbf{Q} takes the values $-\pi/2$ and $-3\pi/2$ with equal probability 0.5. If \mathbf{Q} is considered as a continuous random variable, its pdf can be given as:

$$f_q(q) = [\delta(q - \pi/2) + \delta(q - 3\pi/2)]/2 \quad (39)$$

where δ refers to the Dirac delta function.

Laplace transform can be again applied to determine the pdf of φ_{Ah} . Define a random variable \mathbf{P} as $\mathbf{P} = \mathbf{Z} + \mathbf{T}$, then the pdf of \mathbf{P} using Laplace transform is given by:

$$f_p(p) = L^{-1}\{L[f_z(z)]L[f_t(t)]\} \\ = \frac{1}{2h\Delta\alpha} \left[\text{erf}\left(\frac{p+b_2}{\sqrt{2}\sigma_h}\right) - \text{erf}\left(\frac{p+b_1}{\sqrt{2}\sigma_h}\right) \right], h=12k-6\pm1 \quad (40)$$

where, $b_1 = h\alpha_1 - m_{hi}$, $b_2 = h\alpha_2 - m_{hi}$, $m_{hi} = -h2\pi/3$.

$$\varphi_{Ah} = P + Q \quad (41)$$

Since φ_{Ah} is the sum of two independent random variables P and Q , its pdf is the convolution of $f_p(p)$ with $f_q(q)$:

$$f_{\varphi_{Ah}}(\varphi_{Ah}) = \frac{1}{2} [f_p(\varphi_{Ah} - \pi/2) + f_p(\varphi_{Ah} - 3\pi/2)] \quad (42)$$

It follows that:

$$f_{\varphi_{Ah}}(\varphi_{Ah}) = \frac{1}{4h\Delta\alpha} \left[\text{erf}\left(\frac{\varphi_{Ah} - \pi/2 + b_2}{\sqrt{2}\sigma_h}\right) - \text{erf}\left(\frac{\varphi_{Ah} - \pi/2 + b_1}{\sqrt{2}\sigma_h}\right) + \text{erf}\left(\frac{\varphi_{Ah} - 3\pi/2 + b_2}{\sqrt{2}\sigma_h}\right) - \text{erf}\left(\frac{\varphi_{Ah} - 3\pi/2 + b_1}{\sqrt{2}\sigma_h}\right) \right] \quad (43)$$

VI. SIMULATIONS RESULTS

A program based on Monte Carlo simulations using Matlab was developed in order to simulate the probabilistic characteristic of harmonics produced by the twelve-pulse ac/dc converter of Fig. 1. The pdfs of harmonic amplitude and phase angles obtained from simulation are compared to the analytical results. The more accurate model of the twelve-pulse converter given by (7), (8), (9), (10) and (11) is easily included in a Matlab program. The program makes 10^4 trials for all simulated random variables α , τ and β before computing the cumulative distribution function of the resulting functions (I_{Ah} , J_{Ah} , ψ_{Ah} , φ_{Ah}).

A. Harmonic Amplitudes

The pdfs of the amplitudes of harmonic currents of orders 5 and 11 corresponding to the condition: $E = 1.0$ p.u.; $R_d = 1.0$ p.u.; and average UF of 3% (i.e., $E[\tau] = 0.03$) and different variation intervals of the firing angle α , are shown in Figs. 3(a) and 3(b) where the curves are obtained from numerical integration of (25) and (29), while the data points are obtained from Monte Carlo simulations. There is good agreement between the pdfs curves obtained from numerical integration and those obtained from Monte Carlo simulations. It is observed that the pdf of J_{Ah} is half-normal whereas the pdf of I_{Ah} is a normal distribution when α is constant. This is similar to the observation that had already been made in the case of non-characteristic and characteristic harmonic currents produced by a six-pulse converter [3].

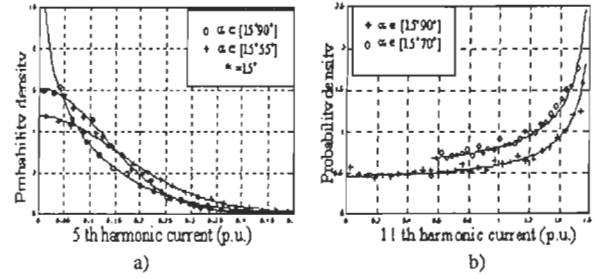


Fig. 3. Pdfs of J_{Ah} and I_{Ah} for several variation intervals of α and an average τ of 3%: a) pdfs of J_{A5} ; b) pdfs of I_{A11}

B. Harmonic phase angles

The pdfs of the phase angles of harmonic currents of orders 5, 7, 11 and 13 corresponding to the firing angle α varying between 15 and 90 and an average τ equal to 3% are shown in Figs. 4(a) and 4(b). There is good agreement between the curves obtained from (35) and (43) and those obtained from Monte Carlo simulations. The pdfs of ψ_{A11} and ψ_{A13} are unimodal whereas the pdfs of φ_{A5} and φ_{A7} are bimodal. This property of non-characteristic harmonic currents has already been pointed out in [3]. It can be concluded that the phase diversity of non-characteristic harmonic currents of orders $12k-6 \pm 1$ produced by the analyzed twelve-pulse ac/dc converter is twice as high as that of characteristic harmonic currents of order $6k \pm 1$ produced by a six-pulse ac/dc converter.

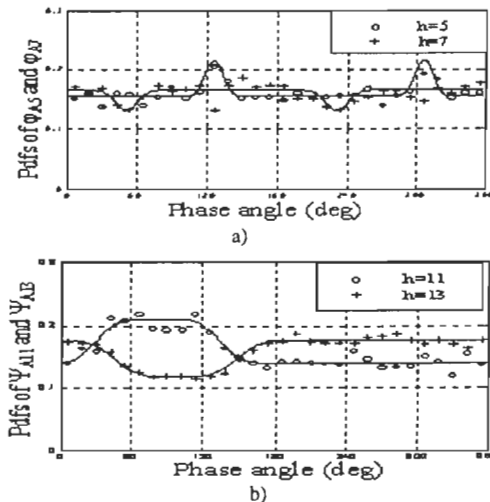


Fig. 4. Pdfs of ψ_{Ah} and φ_{Ah} for several variation intervals of α and an average τ of 3%: a) pdfs of ψ_{A5} and φ_{A7} ; b) pdfs of φ_{A11} and φ_{A13}

VII. CONCLUSION

This paper presents the probabilistic modeling of random harmonic currents produced by a twelve-pulse ac/dc with random dc load and random voltage unbalance. The pdfs of harmonic current amplitudes and phase angles have been obtained based on the converter simplified model. Monte Carlo simulations have been performed to validate the analysis. It has been found that the pdfs of the non-characteristic and the characteristic harmonic currents produced by the analyzed twelve-pulse ac/dc converter have similar properties with those generated by a six-pulse ac/dc converter. The phase diversity of non-characteristic harmonic currents of orders $12k \pm 1$ produced by the analyzed twelve-pulse ac/dc converter is twice as high as that of characteristic harmonic currents of orders $6k \pm 1$ produced by a six-pulse ac/dc converter. The probabilistic analysis presented in this paper can be extended to a p-pulse ac/dc converter.

VIII. ACKNOWLEDGMENT

This work was supported by the National Sciences and Engineering Council of Canada (NSERC) and Hydro-Québec Research Chair on Power and Electrical Energy at Université du Québec à Trois-Rivières.

IX. REFERENCES

- [1] IEEE-519, "Recommended practices and requirements for harmonic control in electric power systems," 2nd ed., 1992.
- [2] D. A. Paice, *Power Electronics Converter Harmonics*, IEEE Press, 1995.
- [3] Y. J. Wang and L. Pierrat, "Probabilistic modeling of current produced by an ac/dc converter under voltage unbalance," *IEEE Trans. On Power Delivery*, vol. 8, n° 4, Oct. 1993 pp. 2060-2066.
- [4] S.R. Kaprielian, A. E. Emanuel, R.V. Dwyer and H. Melita, "Predicting Voltage Distortion in a System with Multiple Random Harmonic Sources," *IEEE Trans. On Power Del.*, vol. 9, n° 3, July 1994, pp. 285-293.
- [5] É. Ngandui, El Jihad Mohammed, G. Olivier and P. Sicard, "Analytical Prediction of Harmonics Produced by Twelve-pulse Converter Under Unbalanced Supply Voltage," submitted for presentation at ICHQP'2000.

X. BIOGRAPHIES

Éloi Ngandui (S'90-M'97) was born in 1961 in Cameroon. He received the Professeur degree (with honor) from the Advanced Teacher's Training College for Technical Education (ENSET), University of Douala, Douala, Cameroun, in 1987, the M.Sc.A. and Ph.D. degrees in electrical and computer engineering from the École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada, in 1991 and 1997 respectively. In 1998, he joined the Department of Electrical Engineering, Université du Québec à Trois-Rivières, where he is currently a Professor. His research interests include power electronics, power quality and automatic control systems.

El Jihad MOHAMMED was born in Morocco in 1974, he received B.Eng. from Superior Institute of Electrical Engineering (ISGE), Casablanca, Morocco, in 1996, he worked as application engineer in Setronic company from 1996 to 1998, Settat, Morocco. He is currently preparing his M.Sc.A degree in electrical engineering at Université du Québec à Trois Rivières. His research interests include power electronics, power quality.

Ahmed CHÉRITI (S'86-M'93) was born in Algeria in 1960. He received the B.S. degree in electrical engineering and the M.S. degree in power electronics from the Université du Québec à Trois-Rivières, Trois-Rivières,

Québec, Canada, and the Ph.D. degree from École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada, in 1985, 1987, and 1993, respectively. From 1990 to 1992, he worked as a Lecturer in Power Electronics at the École de Technologie Supérieure de Montréal. In 1992, he joined the Department of Electrical Engineering, Université du Québec à Trois-Rivières, where he is currently a Professor. His research interests include ac drives, neural networks, soft-commutated converters, and power-factor-correction circuits. Dr Chérity is a Registered Professional Engineer in the Province of Québec.

Pierre Sicard (S'84, M'85) received his Bachelor degree in technology of electricity in 1985 from the École de Technologie Supérieure, Montréal Qc, Canada, his M.S. degree in industrial electronics in 1990 from the Université du Québec à Trois-Rivières, Trois-Rivières Qc, Canada, and his Ph.D. degree in electrical engineering in 1993 from Rensselaer Polytechnic Institute, Troy NY, USA. In 1992, he joined the Université du Québec à Trois-Rivières as Professor in Electrical Engineering. He is currently the Hydro-Québec Research Chair and a member of the Research Group in Industrial Electronics, both at the Université du Québec à Trois-Rivières. His current research interests include robotics, modeling, controller and observer design for nonlinear systems, control in power electronics, passivity based control, adaptive control and neural networks.

Annexe B

➤ Calcul des modules des harmoniques caractéristiques

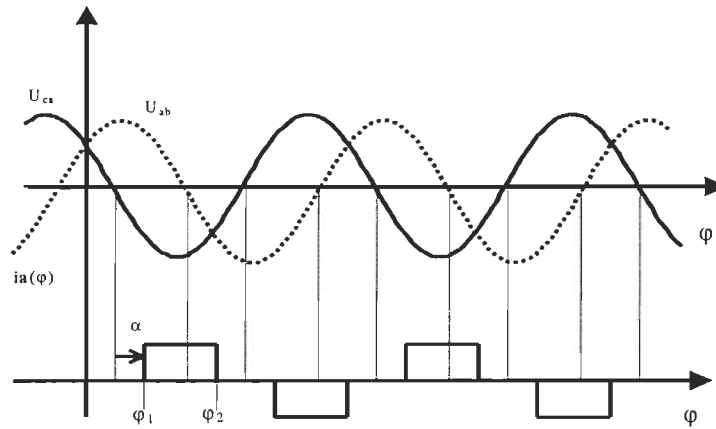


Figure 1: Tensions composées (U_{ab} et U_{ca}) et le courant correspondant dans la phase A

Le développement en série de Fourier de l'onde de courant montrée à la figure 1 donne la composante harmonique de rang h sous la forme complexe:

$$\begin{aligned} \bar{I}_h = 2\bar{c}_h &= \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} i(\varphi) e^{-jh\varphi} d\varphi = 2 \frac{I_d}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} i(\varphi) e^{-jh\varphi} d\varphi \\ &= \frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} e^{-\frac{jh(\varphi_1 + \varphi_2)}{2}} \end{aligned}$$

Si on utilise le sinus (plutôt que le cosinus) pour exprimer le courant instantané correspondant, la phase de I_h est corrigée de $\pi/2$ et \bar{I}_h s'écrit :

Annexe B

$$\overline{I_h} = \frac{4I_d}{h\pi} \sin \frac{h(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} e^{\frac{-jh(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} + \frac{j\pi}{2}}$$

On en déduit que le module de l'harmonique h s'écrit :

$$I_h = \frac{4I_d}{h\pi} \sin \left| \frac{h(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} \right|$$

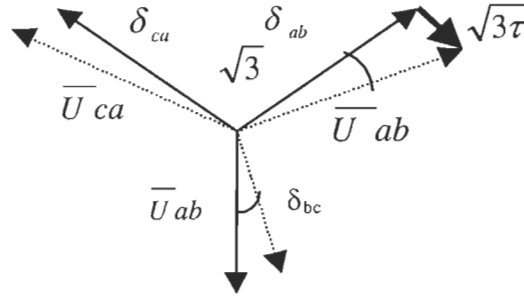


Figure 2: Angle de déviation de phase de la tension composée causé par la séquence inverse

Pour calculer les valeurs de φ_1 et de φ_2 dans les différentes phases, le déphasage de la tension de ligne due à la présence de la séquence inverse doit être considérée. Il suffit d'appliquer les équations (2.9) à (2.11) pour écrire les relations suivantes :

$$\varphi_{1a} = \varphi_{2c} = (\alpha + \pi) - 5\pi/6 - \delta_{ca} = \alpha + \pi/6 - \delta_{ca}$$

$$\varphi_{1b} = \varphi_{2a} = (\alpha + \pi) - \pi/6 - \delta_{ab} = \alpha + 5\pi/6 - \delta_{ab}$$

$$\varphi_{1c} = \varphi_{2b} = (\alpha + \pi) - \pi/2 - \delta_{bc} = \alpha + 3\pi/2 - \delta_{bc}$$

On remplace les expressions de φ_1 et φ_2 dans l'expression de I_h , on obtient :

Annexe B

$$I_{ah} = \frac{4I_d}{h\pi} \left| \sin \frac{h(2\pi/3 + \delta_{ca} - \delta_{ab})}{2} \right|$$

Avec l'utilisation de la relation trigonométrique suivante :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

l'expression de I_{ah} devient :

$$I_{ha} = \frac{4I_d}{h\pi} \left| \sin \frac{h\pi}{3} \cos \frac{h(\delta_{ca} - \delta_{ab})}{2} + \cos \frac{h\pi}{3} \sin \frac{h(\delta_{ca} - \delta_{ab})}{2} \right|$$

Puisque les angles de déviation δ_{ab} et δ_{ca} sont petits, les approximations de premier ordre du cosinus et du sinus permettent d'obtenir l'expression suivante :

$$I_{ha} \approx \frac{2\sqrt{3}I_d}{h\pi} \pm \frac{I_d(\delta_{ca} - \delta_{ab})}{\pi}$$

En substituant les expressions de δ_{ab} , δ_{bc} et δ_{ca} données respectivement par (2.23), (2.24) et (2.25) dans (2.27) nous obtenons :

$$I_{ha} \approx \frac{2\sqrt{3}I_d}{h\pi} \pm \frac{\sqrt{3}I_d\tau \cos \theta}{\pi} = I_h^0 \pm \Delta I_h(\tau, \theta)$$

➤ Calcul des phases des harmoniques caractéristiques

À partir de l'analyse de fourrier de l'onde de courant montrée dans la figure 1, on peut écrire la phase :

$$\beta_{ah} = -h \frac{(\varphi_{2a} - \varphi_{1a})}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi(1 - U[\sin[h(\varphi_{2a} - \varphi_{1a})/2]])$$

Annexe B

Le dernier terme contient la fonction d'Heaviside pour tenir compte du signe de $\sin[h(\varphi_{2a} - \varphi_{1a})/2]$. La fonction d'Heaviside est définie comme suit :

$$U(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On remplaçant les relations de φ_{2a} et φ_{1a} décrites précédemment dans l'expression de la phase β_{ah} .

$$\beta_{ah} = -h\alpha + \frac{(1-h)\pi}{2} + \frac{h(\delta_{ca} + \delta_{ab})}{2} + \pi \left(1 - U \left[\sin \left[h \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\delta_{ca} - \delta_{ab}}{2} \right) \right] \right] \right)$$

On utilisant les approximation de δ_{ab} et δ_{ca} décrites précédemment, la forme finale de β_{ah} s'écrit :

$$\boxed{\beta_{ha} = -h\alpha + \frac{(1-h)\pi}{2} + \frac{h\tau \sin(\theta)}{2} - \pi \left(1 - U \left[\sin \left[h \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}\tau \cos(\theta)}{2} \right] \right] \right)}$$

➤ Calcul de la moyenne μ_x

Les composantes réelle X_h et imaginaire Y_h de l'harmonique de courant de rang h s'expriment par:

$$X_h = \pm \frac{12I_d}{h\pi} \cosh \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \pm \frac{Cte}{h} \cos \alpha \cosh \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$Y_h = \pm \frac{12I_d}{h\pi} \sinh \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = \pm \frac{Cte}{h} \cos \alpha \sinh \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right)$$

Annexe B

avec

$$I_d = \frac{V_d}{R_d} = \frac{6\sqrt{6}V \cos \alpha}{\pi R_d}$$

et

$$Cte = \frac{72\sqrt{6}V}{\pi^2 R_d}$$

Si U est une variable aléatoire, $f_u(u)$ sa densité et $V=g(U)$ une fonction de U, alors le moment d'ordre k de V peut être obtenu par :

$$E[V^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} V^k f_v(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(u)]^k f_u(u) du$$

Il est à noter que la seconde intégrale permet d'obtenir le moment d'ordre k à partir de la densité de U sans avoir besoin de la densité de V.

$$E[x] = \mu_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x f_{\alpha}(\alpha) d\alpha = \pm \frac{Cte}{h\Delta\alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \cosh\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) d\alpha$$

$$\mu_x = \pm \frac{Cte}{2h\Delta\alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ \cos[\alpha(1+h) + h\pi/6] + \cos[\alpha(1-h) - h\pi/6] \right\} d\alpha$$

$$\mu_x = \pm \frac{Cte}{2h\Delta\alpha} \left\{ \left[\frac{\sin[\alpha(1+h) + h\pi/6]}{1+h} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \left[\frac{\sin[\alpha(1-h) - h\pi/6]}{1-h} \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \right\}$$

Annexe B

$$\mu_x = \pm \frac{Cte}{2h\Delta\alpha} \left\{ \frac{\sin[\alpha_2(1+h) + h\pi/6] - \sin[\alpha_1(1+h) + h\pi/6]}{1+h} + \frac{\sin[\alpha_2(1-h) - h\pi/6] - \sin[\alpha_1(1-h) - h\pi/6]}{1-h} \right\}$$